目　　录

第一章　环 和 理 想

我们首先简略地复习一下环的定义和基本性质．这可以说明要求读者具备的水平并用来规定有关记号和约定．然后讨论素理想和极大理想．本章最后一部分讨论在理想上进行的一系列初等运算． 在本章末尾的习题中引进了 Grothendieck 概型的语言．

环 和 环 同 态

环 A 是具有两个二元运算(加法和乘法)的集合，使得

1) A 对于加法是一个交换群(这样，A 有零元素，记为 0，而对于每个元素 $x \in A$ 有(加法)逆元素 $-x$)．

2) 乘法是结合的:

$$(xy)z = x(yz).$$

而且对于加法是分配的:

$$x(y+z) = xy + xz,$$
$$(y+z)x = yx + zx.$$

我们所考查的环都是**交换环**:

3) 对所有 x、$y \in A$，$xy = yx$，

且具有**单位元**(记为 1):

4) $\exists\, 1 \in A$，使得对所有 $x \in A$，$x1 = 1x = x$

这样，单位元是唯一的．

在整本书里，"环"这个字都表示具有单位元的交换环． 即适合上面的公理 1)–4)的环．

注记． 在 4)中我们并不排除 $1 = 0$ 这一可能性，如果这样的话，那么对于任意元素 $x \in A$ 有

$$x = x1 = x0 = 0,$$

这就是说 A 由一个元素 0 组成. 这种环称为**零环**，为了简略起见将它也记为 0.

环同态是一个从环 A 映入环 B 的映射 f，它具有以下性质:

i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (即 f 是加法交换群的同态，因此 $f(x-y)=f(x)-f(y)$, $f(-x)=-f(x)$, $f(0)=0$);

ii) $f(xy)=f(x)f(y)$;

iii) $f(1)=1$.

换句话说，f 保持加法、乘法和单位元.

环 A 的子集 S 叫作 A 的**子环**，如果 S 是加法子群，对乘法封闭且含有 A 的单位元. 这时从 S 映入 A 的恒同映射就是个环同态.

如果 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 都是环同态，那么它们的合成 $g\circ f:A\to C$ 也是环同态.

理想. 商环

环 A 中的一个加法子群 $\mathfrak{a}$ 叫作环 A 的一个**理想**，如果它具有性质 $A\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}$ (即若 $x\in A$ 且 $y\in\mathfrak{a}$，则 $xy\in\mathfrak{a}$). A 中乘法诱导出商群 $A/\mathfrak{a}$ 中唯一确定的乘法，这就使得这个商群成为一个环，叫做**商环**(或同余类环) $A/\mathfrak{a}$. $A/\mathfrak{a}$ 的元素是 A 对于 $\mathfrak{a}$ 的陪集，而映射 $\varphi:A\to A/\mathfrak{a}$ 将每个元素 $x\in A$ 映到它的陪集 $x+\mathfrak{a}$，是环的满同态.

我们将经常用到下面这个事实:

命题 1.1 在环 A 的包含 $\mathfrak{a}$ 的那些理想 $\mathfrak{b}$ 与环 $A/\mathfrak{a}$ 的理想 $\bar{\mathfrak{b}}$ 之间存在着保持包含关系的一一对应: $\mathfrak{b}=\varphi^{-1}(\bar{\mathfrak{b}})$. ■

设 $f:A\to B$ 是任一环同态，f 的**核** $f^{-1}(0)$ 是环 A 中的一个理想 $\mathfrak{a}$，而 f 的**象** $f(A)$ 是环 B 中的子环 C，同态 f 导出环同构 $A/\mathfrak{a}\cong C$.

我们有时采用记号 $x\equiv y \pmod{\mathfrak{a}}$，它等价于 $x-y\in\mathfrak{a}$.

零因子．幂零元．可逆元

环 A 中的**零因子**是指"整除 0"的元素 x，即在 A 中存在着 $y\neq 0$，使得 $xy=0$．没有非零零因子(且 $1\neq 0$)的环叫作**整环**．例如 $\mathbf{Z}$ 和 $k[x_1,\cdots,x_n]$（其中 k 是域而 $x_1,\cdots,x_n$ 是无关变元），都是整环．

元素 $x\in A$ 叫作**幂零的**，如果 $x^n=0$ 对某个 $n>0$．每个**幂零元**都是零因子(除非 $A=0$)，但反过来，一般说来不对．

环 A 中的**可逆元**是指每一个"整除 1"的元素 x，即对某个 $y\in A$ 有 $xy=1$．这样一个元素 y 唯一地被确定，记作 x^{-1}．A 中的可逆元全体组成一个(乘法)交换群．

一个元素 $x\in A$ 的所有倍元 ax 组成一个**主理想**，记作 (x) 或 Ax．元素 x 是可逆元，当且仅当 $(x)=A=(1)$．**零理想**(0)通常简记作 0．

如果环 A 中 $1\neq 0$ 而且每个非零元都是可逆元，A 就叫做**域**，任一域都是整环(反过来并不对，$\mathbf{Z}$ 就不是域)．

命题 1.2. 设 A 是个非零环，那么以下诸断言等价：

i）A 是域；

ii）在 A 中除了 0 和(1)之外没有别的理想；

iii）任一从 A 映入非零环的同态都是单的．

证明　i)→ii)．设 $\mathfrak{a}\neq 0$ 是 A 中的理想，那么 $\mathfrak{a}$ 包含一个非零元 x，但 x 是可逆元，因此，$\mathfrak{a}\supseteq x=(1)$，所以 $\mathfrak{a}=(1)$．

ii)→iii)．设 $\varphi:A\to B$ 是一个环同态，它的核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是 A 中的理想，且异于 1，因此，$\mathrm{Ker}(\varphi)=0$，这就是说 φ 是单的．

iii)→i)．设 x 是 A 的一个元素，并假定它不是可逆元．因 $(x)\neq(1)$，所以环 $B=A/(x)$ 不是零环．令 $\varphi:A\to B$ 是从 A 映到 B 之上的以(x)为核的自然同态．根据假设，φ 是单的．因此 $(x)=0$，也就是说 $x=0$．■

素理想和极大理想

环 A 中的理想 $\mathfrak{p}$ 叫做**素理想**，如果 $\mathfrak{p} \neq (1)$，而从包含关系 $xy \in \mathfrak{p}$ 推出 $x \in \mathfrak{p}$ 或者 $y \in \mathfrak{p}$.

环 A 中的理想 $\mathfrak{m}$ 叫做**极大理想**，如果 $\mathfrak{m} \neq (1)$，而且不存在理想 $\mathfrak{a}$ 适合条件 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \subset (1)$（**严格**包含关系）.

换句话说:

$\mathfrak{p}$ 是素理想 $\Longleftrightarrow$ $A/\mathfrak{p}$ 是整环；

$\mathfrak{m}$ 是极大理想 $\Longleftrightarrow$ $A/\mathfrak{m}$ 是域(根据(1.1)和(1.2)).

因此每个极大理想都是素理想(反过来，一般说来不对). 零理想是素理想，当且仅当 A 是整环.

设 $f: A \to B$ 是个环同态，而 $\mathfrak{q}$ 是 B 中的素理想，因为 $A/f^{-1}(\mathfrak{q})$ 与 $B/\mathfrak{q}$ 的一个子环同构，所以它不包含非零零因子，因此理想 $f^{-1}(\mathfrak{q})$ 是 A 中素理想. 然而，如果理想 $\mathfrak{n}$ 是 B 中的一个极大理想，那么 $f^{-1}(\mathfrak{n})$ 不一定是 A 中的极大理想. 我们只能断定它是素理想.（例如 $A = \mathbf{Z}, B = \mathbf{Q}, \mathfrak{n} = 0$.）*)

素理想在整个交换代数中是很基本的，下面的定理及其系理指出有足够多的素理想.

定理 1.3. 每个 $\neq 0$ 的环 A 中都有极大理想.（我们提醒一下，我们只考虑有单位元的交换环.）

证明. 本定理的证明是 Zorn 引理[1]的一个标准应用.

用 Σ 表示 A 中所有 $\neq (1)$ 的理想的集合. 按包含关系在 Σ

---

*) 如果 f 是满同态，那么从 $\mathfrak{n}$ 是 B 的极大理想可推出 $f^{-1}(\mathfrak{n})$ 是 A 的极大理想.——译者注

1) 设 S 是个非空偏序集，这就是说，在 S 中给了一个关系 $x \leqslant y$，它是自反的、传递的，并具有性质：从 $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$ 同时成立推出等式 $x = y$. S 的子集 T 叫做链，如果对任意一对 $x, y \in T$，一定有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$. Zorn 引理断言，如果 S 中的每个链 T 都在 S 中有上界（也就是说，存在 $x \in S$，使得对一切 $t \in T$，有 $t \leqslant x$），那么 S 中至少有一个极大元.

Zorn 引理等价于选择公理、良序原理等等，可参看例如 P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand (1960).

中引进次序，集合 Σ 包含 0，因而非空．为了应用 Zorn 引理，需要验证 Σ 中的每个链在 Σ 中都有一个上界，设 $(\mathfrak{a}_\alpha)$ 是 Σ 中的一个理想链，那么对任何一对足码 α,β，都有 $\mathfrak{a}_\alpha \leqslant \mathfrak{a}_\beta$ 或 $\mathfrak{a}_\beta \leqslant \mathfrak{a}_\alpha$．令 $\mathfrak{a} = \bigcup_\alpha \mathfrak{a}_\alpha$．那么易证 $\mathfrak{a}$ 是理想，因为 $1 \notin \mathfrak{a}_\alpha$ 对所有 α，所以 $1 \notin \mathfrak{a}$．因此 $\mathfrak{a} \in \Sigma$ 而 $\mathfrak{a}$ 是所考察的链的上界．由 Zorn 引理推出，Σ 中有一个极大元． ■

系理 1.4. 若 A 中一个理想 $\mathfrak{a} \neq (1)$，则 A 中存在一个包有 $\mathfrak{a}$ 的极大理想．

证明．将(1.3)用到 $A/\mathfrak{a}$ 上，再利用(1.1)．也可将(1.3)的证明加以变形来直接证明． ■

系理 1.5. A 中任一非可逆元素都包在一极大理想中． ■

注记． 1）如果环 A 是 Noether 环(第七章)，我们可以避免用 Zorn 引理而得到：在所有 $\neq (1)$的理想组成的集合中有一个极大元．

2）有的环恰只有一个极大理想，例如域，有唯一的一个极大理想 $\mathfrak{m}$ 的环 A 叫作**局部环**，而域 $k = A/\mathfrak{m}$ 叫做环 A 的**同余类域**．

命题 1.6. i）设 A 是一个环，$\mathfrak{m} \neq (1)$是 A 中这样一个理想，它使得任一元素 $x \in A\backslash\mathfrak{m}$ 都是可逆元，那么 A 是局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想．

ii）设 A 是一个环，$\mathfrak{m}$ 是它的一个极大理想，并假定 $1+\mathfrak{m}$ 中任一元素（即 $1+x$，而 $x \in \mathfrak{m}$）都是 A 中可逆元，那么 A 是局部环．

证明． i）任一 $\neq(1)$的理想都由非可逆元组成，因此都包在 $\mathfrak{m}$ 中，由此推出 $\mathfrak{m}$ 就是 A 中唯一极大理想．

ii）设 $x \in A\backslash\mathfrak{m}$．因为 $\mathfrak{m}$ 极大，x 和 $\mathfrak{m}$ 一起就生成理想 (1)，因此存在着这样的元素 $y \in A$ 和 $t \in \mathfrak{m}$ 使得 $xy + t = 1$．由此推出 $xy = 1 - t$ 属于 $1+\mathfrak{m}$，因而是可逆元，再利用i)即可． ■

仅有有限个极大理想的环叫作**半局部环**．

例． 1) $A = k[x_1, \cdots, x_n]$，k 为域，设 $f \in A$ 是一个不可约多项式．由唯一因子分解定理推出理想 (f) 是一个素理想．

2) $A=\mathbf{Z}$. $\mathbf{Z}$ 中任一个理想均有形状 (m)，这里 $m\geqslant 0$. (m) 是素理想当且仅当 $m=0$ 或 m 是素数. 所有形如 (p) 的理想，其中 p 是素数，都是极大理想. $\mathbf{Z}/(p)$ 是由 p 个元素组成的域.

同样断言对于例 1) 当 $n=1$ 时也成立，然而当 $n>1$ 时不成立. $A=k[x_1,\cdots,x_n]$ 中所有常数项等于 0 的多项式组成的理想 $\mathfrak{m}$ 是一个极大理想. 因为它是将 $f\in A$ 映到 $f(0)$ 的同态 $A\to k$ 的核. 然而当 $n>1$ 时理想 $\mathfrak{m}$ 不是主理想：它的任意一组生成元都至少包含 n 个元素.

3) **主理想整环**是所有理想都是主理想的整环. 在这种环里，任一非零素理想都是极大的. 因为如果理想 $(x)\neq 0$ 是素理想，而 $(y)\supset(x)$，那么 $x\in(y)$，令 $x=yz$，因 $yz\in(x)$，而 $y\notin(x)$，所以推出 $z\in(x)$. 令 $z=tx$，那么 $x=yz=ytx$，于是 $yt=1$，因而 $(y)=(1)$.

小根和大根*)

命题 1.7. 环 A 的所有幂零元的集合 $\mathfrak{N}$ 是一个理想；环 $A/\mathfrak{N}$ 中没有非 0 幂零元.

证明. 如果 $x\in\mathfrak{N}$，显然有 $ax\in\mathfrak{N}$，对所有 $a\in A$. 设 x，$y\in\mathfrak{N}$，并设 $x^m=0$，$y^n=0$. 根据二项式定理（它在任意交换环中亦成立），$(x+y)^{m+n-1}$ 是乘积 x^ry^s 的带整系数的和，其中 $r+s=m+n-1$. 显然，不等式 $r<m$ 和 $s<n$ 不能同时成立，因此这些乘积中的每一个都是零，这就是说 $(x+y)^{m+n-1}=0$. 因此 $x+y\in\mathfrak{N}$. 这证明了 $\mathfrak{N}$ 是理想.

将元素 $x\in A$ 所属的 $A/\mathfrak{N}$ 中的同余类记作 $\bar{x}$. 那么 $\bar{x}^n$ 就是 x^n 所属的同余类. 因此 $\bar{x}^n=0\Longrightarrow x^n\in\mathfrak{N}\Longrightarrow(x^n)^k=0$ 对某个 $k>0\Longrightarrow x\in\mathfrak{N}\Longrightarrow\bar{x}=0$. ■

理想 $\mathfrak{N}$ 叫作环 A 的**小根**. 下面命题给出 $\mathfrak{N}$ 的另一种定义.

---

*) 小根又叫幂零元根，大根又叫 Jacobson 根.——译者注

命题 1.8. A 的小根即是 A 中所有素理想的交.

证明. 设 $\mathfrak{N}'$ 是 A 中所有素理想的交. 如果 $f\in A$, f 幂零, 而 $\mathfrak{p}$ 是一素理想,那么对某个 $n>0$, 有 $f^n=0\in\mathfrak{p}$, 由 $\mathfrak{p}$ 是素理想推出 $f\in\mathfrak{p}$, 因此 $f\in\mathfrak{N}'$.

反过来,设 f 不是幂零元. 用 Σ 表一切具有性质

$$n>0\Longrightarrow f^n\notin\mathfrak{a}$$

的理想 $\mathfrak{a}$ 的集合. 因为 $0\in\Sigma$, 所以 Σ 不是空集. 将 Σ 按包含关系引进次序. 用(1.3)中同样的论证方法可证能够将 Zorn 引理应用到 Σ 上. 因此, Σ 有一个最大元,将它记作 $\mathfrak{p}$. 再去证明 $\mathfrak{p}$ 是素理想. 设 $x,y\notin\mathfrak{p}$, 那么理想 $\mathfrak{p}+(x)$ 和 $\mathfrak{p}+(y)$ 都严格包含 $\mathfrak{p}$, 所以都不属于 Σ. 因此

$$f^m\in\mathfrak{p}+(x),\quad f^n\in\mathfrak{p}+(y)$$

对某两个 m 和 n. 由此推出 $f^{m+n}\in\mathfrak{p}+(xy)$. 因此理想 $\mathfrak{p}+(xy)$ 不属于 Σ. 所以 $xy\notin\mathfrak{p}$. 这样我们就有一个素理想 $\mathfrak{p}$ 它不包含 f, 因此 $f\notin\mathfrak{N}'$. ■

环 A 的**大根** $\mathfrak{R}$ 定义为它所有的极大理想的交. 它可以描述如下:

命题 1.9. $x\in\mathfrak{R}\Longleftrightarrow$ 对一切 $y\in A$, $1-xy$ 都是可逆元.

证明. $\Longrightarrow$: 如果 $1-xy$ 不是可逆元,那么根据(1.5),这个元素属于某个极大理想 $\mathfrak{m}$. 但是, $x\in\mathfrak{R}\subseteq\mathfrak{m}$, 因此 $xy\in\mathfrak{m}$, 于是 $1\in\mathfrak{m}$, 矛盾.

$\Longleftarrow$: 假定 $x\notin\mathfrak{m}$, 而 $\mathfrak{m}$ 是某个极大理想. 这时 $\mathfrak{m}$ 和 x 一起就生成理想 (1). 因此对于某个 $u\in\mathfrak{m}$ 和某个 $y\in A$, 有 $u+xy=1$. 这就是说 $1-xy\in\mathfrak{m}$, 因此这个元素不是可逆元. ■

理想的运算

设 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是环 A 中的理想,它们的**和** $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 定义为所有的和 $x+y$ 的集合,其中 $x\in\mathfrak{a}$, $y\in\mathfrak{b}$, 它是包含 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的最小理想. 更一般地, 还可以定义环 A 中任意一组理想(不一定是有限个)的和

$\sum_{i\in I}\mathfrak{a}_i$；这个和中的元素是所有可能的形如 $\sum x_i$ 的和，其中 $x_i\in\mathfrak{a}_i$，对一切 $i\in I$，且几乎所有元素 x_i（即除有限个外）都是零元素．这些理想的和是包含所有这些理想 $\mathfrak{a}_i$ 的最小理想．

任意一组理想的**交**仍是理想，因此环 A 的理想对于包含关系组成一个完备格．

环 A 中两个理想 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 的**积** $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ 定义为由一切可能的乘积 xy 所生成的理想，其中 $x\in\mathfrak{a}$ 而 $y\in\mathfrak{b}$．它是一切有限和 $\sum x_iy_i$ 的集合，其中每个 $x_i\in\mathfrak{a}$，每个 $y_i\in\mathfrak{b}$．类似地可定义任意**有限个**理想的积．特别，对任意理想 $\mathfrak{a}$，可定义它的幂 $\mathfrak{a}^n(n>0)$．照惯例，规定 $\mathfrak{a}^0=(1)$．理想 $\mathfrak{a}^n(n>0)$ 由所有可能的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 所生成，其中 $x_i\in\mathfrak{a}$，对一切 i．

例． 1）如果 $A=\mathbf{Z}$．$\mathfrak{a}=(m)$，$\mathfrak{b}=(n)$，那么 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 由 m 和 n 的最大公因数所生成；$\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ 由它们的最小公倍数所生成；而 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=(mn)$．因此，这时有 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\Leftrightarrow m,n$ 互素．

2）$A=k[x_1,\cdots,x_n]$，$\mathfrak{a}=(x_1,\cdots,x_n)=$ 由元素 $x_1,\cdots,x_n$ 生成的理想．这时 $\mathfrak{a}^m$ 是不含次数 $<m$ 的项的所有多项式（连同0）的集合．

到目前为止所定义的三种运算（和、交、积）都是交换的和结合的，**分配律**也成立：

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}.$$

在环 $\mathbf{Z}$ 中，$\cap$ 和 $+$ 这两个运算中的每一个对另一个都是分配的．但是在一般情形，这个事实并不成立．在这方面最好的结果是**模律**：

如果 $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{b}$ 或 $\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{c}$，则 $\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}$．

在环 $\mathbf{Z}$ 中，有 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{a}\mathfrak{b}$．但在一般情形只有包含关系 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ 成立（因为 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{a}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+\mathfrak{b}(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{b}$）．显然 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$，因此

$$\text{如果 } \mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1) \text{ 则 } \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

如果 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1)$，理想 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 叫作**互素**的．对于互素的理想

$\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 来说，有 $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{ab}$. 显然，$\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 互素等价于存在着元素 $x\in\mathfrak{a}$, $y\in\mathfrak{b}$, 使得 $x+y=1$.

设 $A_1,\cdots,A_n$是一些环，它们的**直积**

$$A=\prod_{i=1}^{n}A_i$$

定义为所有序列 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的集合，其中 $x_i\in A_i(1\leqslant i\leqslant n)$，而在它里面加法和乘法分别定义为按分量相加和相乘. 它是一个有单位元$(1,1,\cdots,1)$的交换环，投影 $p_i:A\to A_i$，由 $p_i(x)=x_i$ 所定义，是环同态.

设 A 是一个环，$\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 是它的理想，按公式

$$\varphi(x)=(x+\mathfrak{a}_1,\cdots,x+\mathfrak{a}_n)$$

来定义同态

$$\varphi:\ A\to\prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{a}_i)$$

命题 1.10.[*] i) 如果对一切 $i\neq j$, $\mathfrak{a}_i$ 和 $\mathfrak{a}_j$ 互素，那么 $\prod\mathfrak{a}_i=\cap\mathfrak{a}_i$.

ii) 同态 φ 是满的 $\Longleftrightarrow$ 对一切 $i\neq j$, $\mathfrak{a}_i$ 和 $\mathfrak{a}_j$ 互素.

iii) 同态 φ 是单的 $\Longleftrightarrow$ $\cap\mathfrak{a}_i=(0)$.

证明. i) 对 n 作归纳来证明. $n=2$ 的情形上面已经证过了. 设 $n>2$; 假定对于 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_{n-1}$ 结果成立，那么令 $\mathfrak{b}=\prod_{i=1}^{n-1}\mathfrak{a}_i=\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathfrak{a}_i$. 因为 $\mathfrak{a}_i+\mathfrak{a}_n=(1)\ (1\leqslant i\leqslant n-1)$, 故有 $x_i+y_i=1\ (x_i\in\mathfrak{a}_i,\ y_i\in\mathfrak{a}_n)$, 于是

$$\prod_{i=1}^{n-1}x_i=\prod_{i=1}^{n-1}(1-y_i)\equiv1\qquad(\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}_n).$$

因此 $\mathfrak{a}_n+\mathfrak{b}=(1)$, 于是

$$\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i=\mathfrak{b}\mathfrak{a}_n=\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}_n=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_n.$$

---

[*] 这个命题是孙子定理的推广. ——译者注

ii) $\Longrightarrow$：作为例子，我们去证明 $\mathfrak{a}_1$ 和 $\mathfrak{a}_2$ 互素．存在这样一个元素 $x\in A$ 使得 $\varphi(x)=(1,0,\cdots,0)$．于是 $x\equiv 1(\bmod \mathfrak{a}_1)$，$x\equiv 0(\bmod \mathfrak{a}_2)$，所以

$$1=(1-x)+x\in\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2.$$

$\Longleftarrow$：只要证明，譬如存在一个元素 $x\in A$ 使得 $\varphi(x)=(1,0,\cdots,0)$．因为 $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_i=(1)$ $(i>1)$，故有 $u_i+v_i=1$ $(u_i\in\mathfrak{a}_1,\ v_i\in\mathfrak{a}_i)$．令 $x=\prod_{i=2}^{n}v_i$．那么 $x=\Pi(1-u_i)\equiv 1\ (\bmod\ \mathfrak{a}_1)$．而 $x\equiv 0\ (\bmod \mathfrak{a}_i)$，$i>1$．因此 $\varphi(x)=(1,0,\cdots,0)$，这就是所要证明的．

iii) 因为 $\cap\mathfrak{a}_i$ 是 φ 的核，所以断言显然．■

一般说来，理想的**并** $\mathfrak{a}\cup\mathfrak{b}$ 不是理想．

命题 1.11. i) 设 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n$ 是素理想，而 $\mathfrak{a}$ 是含在 $\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$ 中的理想，那么 $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{p}_i$，对某个 i．

ii) 设 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 是一些理想，$\mathfrak{p}$ 是包含 $\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i$ 的素理想．那么 $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}_i$，对某个 i．如果 $\mathfrak{p}=\cap\mathfrak{a}_i$，那么 $\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_i$，对某个 i．

证明．i) 对 n 作归纳来证明如下形式的命题：

$$\mathfrak{a}\nsubseteq\mathfrak{p}_i(1\leqslant i\leqslant n)\Longrightarrow\mathfrak{a}\nsubseteq\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i.$$

i) 即得证．当 $n=1$ 时，这是显然的．设 $n>1$ 并假定对于 $n-1$ 命题成立，那么对于每个 i 都存在着这样一个元素 $x_i\in\mathfrak{a}$ 使得 $x_i\notin\mathfrak{p}_j$ 对于 $j\neq i$．如果还有 $x_i\notin\mathfrak{p}_i$ 对某个 i，命题已证明．如果不然，$x_i\in\mathfrak{p}_i$，对一切 i．考察元素

$$y=\sum_{i=1}^{n}x_1x_2\cdots x_{i-1}x_{i+1}\cdots x_n,$$

我们有 $y\in\mathfrak{a}$ 而 $y\notin\mathfrak{p}_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$．因此 $\mathfrak{a}\nsubseteq\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$．

ii) 假定 $\mathfrak{p}\not\supseteq\mathfrak{a}_i$ 对一切 i，那么存在着元素 $x_i\in\mathfrak{a}_i$，$x_i\notin\mathfrak{p}(1\leqslant i$

$\leqslant n$)，于是 $\Pi x_i \in \Pi \mathfrak{a}_i \subseteq \cap \mathfrak{a}_i$. 但是 $\Pi x_i \notin \mathfrak{p}$（因为 $\mathfrak{p}$ 是素理想）. 于是 $\mathfrak{p} \not\supseteq \cap \mathfrak{a}_i$. 最后，如果 $\mathfrak{p} = \cap \mathfrak{a}_i$，那么 $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{a}_i$ 对某个 i，因此 $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_i$. 对某个 i. ■

设 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 是环 A 中的理想，它们的**商**定义为集合

$$(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) = \{x \in A \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\},$$

它是一个理想. 特别，$(0:\mathfrak{b})$ 叫作理想 $\mathfrak{b}$ 的**零化子**并记作 $\mathrm{Ann}(\mathfrak{b})$，它是 A 中一切适合条件 $x\mathfrak{b} = 0$ 的元素 x 的集合. A 中所有零因子的集合可表成形状

$$D = \bigcup_{x \neq 0} \mathrm{Ann}\ (x).$$

如果 $\mathfrak{b}$ 是主理想 (x)，我们也将 $(\mathfrak{a}:(x))$ 记作 $(\mathfrak{a}:x)$.

例. 设 $A = \mathbf{Z}$，$\mathfrak{a} = (m)$，$\mathfrak{b} = (n)$，这里 $m = \prod_p p^{\mu_p}$，$n = \prod_p p^{\nu_p}$，那么 $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}) = (q)$，这里 $q = \prod_p p^{\gamma_p}$ 而

$$\gamma_p = \max(\mu_p - \nu_p, 0) = \mu_p - \min(\mu_p, \nu_p).$$

因此 $q = m/(m,n)$，这里 (m,n) 是 m 和 n 的最大公因数.

习题 1.12. i) $\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$.

ii) $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

iii) $((\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = ((\mathfrak{a}:\mathfrak{c}):\mathfrak{b})$.

iv) $(\cap \mathfrak{a}_i:\mathfrak{b}) = \bigcap_i (\mathfrak{a}_i:\mathfrak{b})$.

v) $(\mathfrak{a}: \sum_i \mathfrak{b}_i) = \bigcap_i (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_i)$.

设 $\mathfrak{a}$ 是 A 中的任意理想，它的**根**定义为集合

$$r(\mathfrak{a}) = \{x \in A \mid x^n \in \mathfrak{a} \text{ 对某个 } n > 0\}.$$

如果 $\varphi: A \to A/\mathfrak{a}$ 是自然同态，那么 $r(\mathfrak{a}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{N}_{A/\mathfrak{a}})$，因此根据 (1.7)，$r(\mathfrak{a})$ 是理想.

习题 1.13. i) $r(\mathfrak{a}) \supseteq \mathfrak{a}$.

ii) $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$.

iii) $r(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = r(\mathfrak{a}) \cap r(\mathfrak{b})$.

$x^n \in ab$

iv) $r(\mathfrak{a})=(1)\Longleftrightarrow\mathfrak{a}=(1)$.

v) $r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=r(r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b}))$.

vi) 如果 $\mathfrak{p}$ 是素理想，那么 $r(\mathfrak{p}^n)=r(\mathfrak{p})$ 对一切 $n>0$.

命题 1.14. 理想 $\mathfrak{a}$ 的根是包含 $\mathfrak{a}$ 的一切素理想的交.

证明. 将(1.8)应用到 $A/\mathfrak{a}$ 上. ∎

更一般地，我们可用同样的方法来定义环 A 中任意子集 E 的根 $r(E)$. 一般说来，它**不**是理想. 对于 A 的任意一组子集 E_α，有 $r\left(\bigcup_\alpha E_\alpha\right)=\bigcup_\alpha r(E_\alpha)$.

命题 1.15. $D=A$ 中零因子的集合 $=\bigcup_{x\neq 0} r(\mathrm{Ann}(x))$.

证明. $D=r(D)=r\left(\bigcup_{x\neq 0}\mathrm{Ann}(x)\right)=\bigcup_{x\neq 0} r(\mathrm{Ann}(x))$. ∎

例. 如果 $A=\mathbf{Z}$, $\mathfrak{a}=(m)$, 将 m 的相异素因子记作 p_i $(1\leqslant i\leqslant r)$, 那么 $r(\mathfrak{a})=(p_1\cdots p_r)=\bigcap_{i=1}^{r}(p_i)$.

命题 1.16. 如果环 A 中的理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 的根 $r(\mathfrak{a}), r(\mathfrak{b})$ 互素，那么 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 互素.

证明. $r(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=r(r(\mathfrak{a})+r(\mathfrak{b}))=r(1)=(1)$. 因此根据(1.13), $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=(1)$. ∎

扩 张 和 局 限

设 $f: A\rightarrow B$ 是环同态，如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 中理想，集合 $f(\mathfrak{a})$ 不一定是 B 中理想(例如，f 是将 $\mathbf{Z}$ 映入有理数域 $\mathbf{Q}$ 的嵌入映射，$\mathfrak{a}$ 是 $\mathbf{Z}$ 中任一非零理想). $\mathfrak{a}$ 的象 $f(\mathfrak{a})$ 在 B 中生成的理想 $Bf(\mathfrak{a})$ 叫作理想 $\mathfrak{a}$ 的**扩理想** $\mathfrak{a}^e$. 于是 $\mathfrak{a}^e$ 是一切可能的和 $\sum y_i f(x_i)$ 所组成的集合，其中 $x_i\in\mathfrak{a}$, $y_i\in B$.

现在设 $\mathfrak{b}$ 是 B 中的一个理想. 这时 $f^{-1}(\mathfrak{b})$ 总是 A 中理想，叫作理想 $\mathfrak{b}$ 的**局限理想** $\mathfrak{b}^c$. 如果 $\mathfrak{b}$ 是素理想，那么 $\mathfrak{b}^c$ 也是素理想. 如果 $\mathfrak{a}$ 是素理想，$\mathfrak{a}^e$ 不一定是素理想(例如，$f: \mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Q}$, $\mathfrak{a}\neq$

0；这时 $\mathfrak{a}^e = \mathbf{Q}$ 不是素理想）．

我们能如下分解 f：

$$A \xrightarrow{p} f(A) \xrightarrow{j} B$$

其中 p 是满的，而 j 是单的． 对于 p 来说情形很简单，由（1.1），在 $f(A)$ 的所有理想和 A 的所有包有 $\mathrm{Ker}(f)$ 的理想之间有一一对应．而且素理想对应素理想，然而对于同态 j，在一般情形，情况很复杂，经典例子来自代数数论．

例．研究嵌入映射 $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}[i]$，其中 $i = \sqrt{-1}$．$\mathbf{Z}$ 中素理想 (p) 的扩理想可以是 $\mathbf{Z}[i]$ 中的素理想，也可以不是． 实际上，环 $\mathbf{Z}[i]$ 是主理想整环（因为它里面有带余除法），可以分成以下几种情况：

i）$(2)^e = ((1+i)^2)$，是 $\mathbf{Z}[i]$ 中一个素理想的平方；

ii）如果 $p \equiv 1 \pmod 4$，那么 $(p)^e$ 是两个不同的素理想的乘积（例如 $5^e = ((2+i))((2-i))$）；

iii）如果 $p \equiv 3 \pmod 4$，那么 $(p)^e$ 是 $\mathbf{Z}[i]$ 中素理想．

这些断言中 ii）并不显易．它等价于 Fermat 关于任一素数 $p \equiv 1 \pmod 4$ 可唯一地表成两个整数的平方和的定理（$5 = 2^2 + 1^2$，$97 = 9^2 + 4^2$，等等）．

事实上，关于素理想在这种扩张后的动态问题是代数数论的中心问题之一．

设 f：$A \to B$ 是同态，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ 分别是 A 和 B 中的理想

命题 1.17． i）$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^{ec}$，$\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{b}^{ce}$；

ii）$\mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec}$，$\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^{ece}$；

iii）设 C 是 A 中那些理想的集合，它们都是 B 中理想的局限理想；而 E 是 B 中那些理想的集合，它们都是 A 中理想的扩理想，那么

$$C = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}\},\ E = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}^{ce} = \mathfrak{b}\}.$$

而 $\mathfrak{a} \longmapsto \mathfrak{a}^e$ 是将 C 映到 E 之上的一一映射，它的逆是 $\mathfrak{b} \to \mathfrak{b}^c$．

证明． i）是显然的．ii）由 i）推出．

iii）如果 $\mathfrak{a} \in C$，那么 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b}^{cec} = \mathfrak{a}^{ec}$；反过来，如果

$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}^{ec}$，那么 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{a}^e$ 的局限理想．对于 E 可类似地讨论．■

习题 1.18. 设 $\mathfrak{a}_1$，$\mathfrak{a}_2$ 是 A 中的理想．$\mathfrak{b}_1$，$\mathfrak{b}_2$ 是 B 中的理想，那么

$$
\begin{array}{ll}
(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)^e=\mathfrak{a}_1^e+\mathfrak{a}_2^e, & (\mathfrak{b}_1+\mathfrak{b}_2)^c\supseteq\mathfrak{b}_1^c+\mathfrak{b}_2^c,\\
(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)^e\subseteq\mathfrak{a}_1^e\cap\mathfrak{a}_2^e, & (\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2)^c=\mathfrak{b}_1^c\cap\mathfrak{b}_2^c,\\
(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^e=\mathfrak{a}_1^e\mathfrak{a}_2^e, & (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)^c\supseteq\mathfrak{b}_1^c\cdot\mathfrak{b}_2^c,\\
(\mathfrak{a}_1:\mathfrak{a}_2)^e\subseteq(\mathfrak{a}_1^e:\mathfrak{a}_2^e), & (\mathfrak{b}_1:\mathfrak{b}_2)^c\subseteq(\mathfrak{b}_1^c:\mathfrak{b}_2^c),\\
r(\mathfrak{a})^e\subseteq r(\mathfrak{a}^e), & r(\mathfrak{b})^c=r(\mathfrak{b}^c).
\end{array}
$$

集合 E 对于和与积是封闭的，而 C 对于其余的三个运算是封闭的。

习　　题

1. 设 x 是环 A 中幂零元．证明 $1+x$ 是 A 的可逆元．由此推出幂零元和可逆元的和是可逆元．
2. 设 A 是环，而 $A[x]$ 是系数属于 A 的一个未定元 x 的多项式环．令

$$f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in A[x]$$

证明

i) f 是 $A[x]$ 中可逆元 $\Longleftrightarrow$ a_0 是 A 中可逆元，而 $a_1,\cdots,a_n$ 是幂零元．[设 $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ 是 f 的逆元素．对 r 用归纳法证明 $a_n^{r+1}b_{m-r}=0$．由此推出 a_n 是幂零元，然后再利用习题1．]

ii) f 幂零 $\Longleftrightarrow$ a_0，$a_1,\cdots,a_n$ 幂零．

iii) f 是零因子 $\Longleftrightarrow$ 存在着环 A 的非 0 元 a 使得 $af=0$．[考察最低次的多项式 $g=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ 使得 $fg=0$．那么 $a_nb_m=0$，因而 $a_ng=0$（否则 a_ng 将是次数 $<m$ 的零化 f 的多项式）．然后用归纳法证明 $a_{n-r}g=0(0\leqslant r\leqslant n)$．]

iv) 如果 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)=(1)$，f 就叫**本原多项式**．证明，

如果 $f,g\in A[x]$，那么 fg 本原$\Longleftrightarrow f$ 和 g 皆本原.

3. 推广习题 2 的结果到多个未定元的多项式环 $A[x_1,\cdots,x_r]$ 上去.

4. 在环 $A[x]$ 中，大根与小根重合.

5. 设 A 是环，$A[[x]]$ 是系数在 A 中的形式幂级数 $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 所组成的环. 证明

   i) f 是 $A[[x]]$ 中可逆元$\Longleftrightarrow a_0$ 是 A 中可逆元.

   ii) 如果 f 幂零，那么对一切 $n\geqslant 0$ a_n 都幂零，逆命题是否成立？（参看第七章，习题2.）

   iii) f 属于环 $A[[x]]$ 的大根$\Longleftrightarrow a_0$ 属于环 A 的大根.

   iv) 环 $A[[x]]$ 中任一极大理想 $\mathfrak{m}$ 对 A 的局限理想都是 A 中的极大理想，而 $\mathfrak{m}$ 由 $\mathfrak{m}^c$ 和 x 生成.

   v) A 中任一素理想都是 $A[[x]]$ 中一个素理想的局限理想.

6. 假定环 A 中任一不含在小根中的理想都包含非 0 幂等元（即适合条件 $e^2=e\neq 0$ 的元素 e）. 证明，A 的小根与大根相重合.

7. 设环 A 中任一元素 x 都适合 $x^n=x$ 对某个 $n>1$（而 n 依赖于 x）. 证明 A 中任一素理想都极大.

8. 设 A 是非 0 环. 证明 A 中素理想的集合有一个（按包含关系而言的）极小元素.

9. 设 $\mathfrak{a}\neq(1)$ 是环 A 中的理想. 证明 $\mathfrak{a}=r(\mathfrak{a})$. $\Longleftrightarrow\mathfrak{a}$ 是素理想的交.

10. 设 A 是环，$\mathfrak{N}$ 是它的小根. 证明下列诸断言等价:

    i) A 恰好只有一个素理想;

    ii) A 中任一元素或者是可逆元，或者是幂零元;

    iii) $A/\mathfrak{N}$ 是域.

11. 环 A 叫做 **Boole 环**，如果 $x^2=x$ 对一切 $x\in A$. 在 Boole 环 A 中证明

i) $2x = 0$ 对一切 $x \in A$;

ii) 任一素理想 $\mathfrak{p}$ 都极大，而 $A/\mathfrak{p}$ 是由两个元素组成的域;

iii) 任一具有有限个生成元的理想 A 都是主理想.

12. 局部环里除了 0 和 1 之外，没有别的幂等元.

域的代数闭包的造法 (E. Artin)

13. 设 K 是域，$\sum$ 是系数属于 K 的，首项系数等于 1 的一个未定元的不可约多项式 f 的全体所组成的集合. 对每个 $f \in \sum$，相应一个未定元 x_f. 用 A 表这些未定元 x_f 在 K 上生成的多项式环. 由 $\mathfrak{a}$ 表由所有的多项式 $f(x_f)$，对一切 $f \in \sum$，在 A 中生成的理想. 证明 $\mathfrak{a} \neq (1)$.

设 $\mathfrak{m}$ 是 A 中的一个包有 $\mathfrak{a}$ 的极大理想，并令 $K_1 = A/\mathfrak{m}$. 那么 K_1 是 K 的扩域，在其中每个多项式 $f \in \sum$ 都有根. 对 K_1 重复对 K 的作法，得到域 K_2，等等. 令 $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. 那么 L 是域，在其中每个多项式 $f \in \sum$ 都分解成线性因式之积. 用 $\bar{K}$ 表 L 中在 K 上代数的那些元素的集合. 那么 $\bar{K}$ 是 K 的代数闭包.

14. 用 $\sum$ 表环 A 中完全由零因子组成的理想的全体所组成的集合. 证明 $\sum$ 有一个极大元，而且 $\sum$ 的每个极大元都是素理想. 因此 A 中零因子的集合是素理想的并.

环 的 素 谱

15. 设 A 是环，X 是它的所有素理想的集，对每个子集 $E \subset A$，用 $V(E)$ 表示包含 E 的所有素理想的集. 证明

i) 如果 $\mathfrak{a}$ 是 E 生成的理想，那么 $V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a}))$.

ii) $V(0) = X$, $V(1) = \varnothing$.

iii) 设 $(E_i)_{i \in I}$ 是 A 的任意一组子集，那么

$$V\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big) = \bigcap_{i\in I} V(E_i).$$

iv）对 A 中任意两个理想 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$，$V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{ab}) = V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})$.

这些结果指出，$V(E)$ 这些集合适合拓扑空间里对于闭集的公理．相应的 X 上的拓扑叫做 Zariski **拓扑**．拓扑空间 X 叫做环 A 的**素谱**，并记作 Spec (A).

16. 描述空间 $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$，$\mathrm{Spec}(\mathbf{R})$，$\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[x])$，$\mathrm{Spec}(\mathbf{R}[x])$，$\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[x])$.

17. 对于每个元素 $f\in A$，用 X_f 记 $X = \mathrm{Spec}(A)$中 $V(f)$ 的补集．集合 X_f 是开的．证明它们组成 Zariski 拓扑中开集的一组基，并且具有下述性质：

   i）$X_f\cap X_g = X_{fg}$；

   ii）$X_f = \varnothing \Longleftrightarrow f$ 是幂零元；

   iii）$X_f = X \Longleftrightarrow f$ 是可逆元；

   iv）$X_f = X_g \Longleftrightarrow r((f)) = r((g))$；

   v）X 是拟紧的（quasi-compact）（即对于 X 的每个开覆盖都有一个有限子覆盖）；

   vi）更一般地，集合 X_f 是拟紧的；

   vii）X 中的一个开子集是拟紧的，当且仅当它是有限个形如 X_f 的集合的并．集合 X_f 叫空间 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 的**主开集**.

   [注意，为要证明 v)，只要考察由主开集 $X_{f_i}(i\in I)$ 组成的 X 的覆盖．证明 f_i 生成理想(1)，因此有形如

$$1 = \sum_{i\in J} g_i f_i,\quad g_i\in A,$$

的等式，其中 J 是 I 的某个有限子集．那么 $X_{f_i}(i\in J)$ 覆盖 X.]

18. 将环 A 中的素理想看作空间 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 中的点时，用 x, y 这一类字母来表示它们是合适的．如果 x 又看作 A 中的理想，就写成 $\mathfrak{p}_x$（在逻辑上，x 和 $\mathfrak{p}_x$ 当然是同一样东西）．证明

i）集合 $\{x\}$ 是 Spec(A) 中的闭集（我们说 x 是个"闭点"）$\Longleftrightarrow$ 理想 $\mathfrak{p}_x$ 是极大理想；

ii）$\overline{\{x\}}=V(\mathfrak{p}_x)$；

iii）$y\in\overline{\{x\}}\Longleftrightarrow\mathfrak{p}_x\subseteq\mathfrak{p}_y$；

iv）X 是 T_0—空间（这就是说，如果 x 和 y 是空间 X 中任意两个不同的点，那么或者存在 x 的一个邻域而它不包含 y，或者存在 y 的一个邻域而它不包含 x）.

19. 拓扑空间 X 叫**不可约的**，如果 $X\neq\varnothing$ 而且 X 里每一对非空开子集都相交. 一个等价的条件是：任一非空开集都在 X 里稠密. 证明 $X=$ Spec(A) 不可约，当且仅当 A 的小根是素理想.

20. 设 X 是拓扑空间.

i）如果 Y 是 X 中不可约子空间（习题 19），那么 Y 在 X 中的闭包 $\overline{Y}$ 也是不可约的.

ii）X 的任一不可约子空间都包含在某个极大不可约子空间中.

iii）X 的极大不可约子空间都是闭的，而且它们覆盖 X，它们叫做 X 的**不可约分支**. Hausdorff 空间的不可约分支是什么?

iv）如果 A 是环而 $X=$ Spec(A)，那么 X 的不可约分支是形如 $V(\mathfrak{p})$ 的闭集，这里 $\mathfrak{p}$ 是 A 中一个极小素理想（习题 8）.

21. 设 φ: $A\to B$ 是个环同态. 令 $X=$ Spec (A) 而 $Y=$ Spec (B). 如果 $\mathfrak{q}\in Y$，那么 $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ 是 A 的素理想，即是 X 的一个点. 因此 φ 诱导出映射 φ^*: $Y\to X$. 证明

i）如果 $f\in A$，那么 $\varphi^{*-1}(X_f)=Y_{\varphi(f)}$，因此映射 φ^* 是连续的.

ii）如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 中理想；那么 $\varphi^{*-1}(V(\mathfrak{a}))=V(\mathfrak{a}^e)$.

iii）如果 $\mathfrak{b}$ 是 B 中理想；那么 $\overline{\varphi^*(V(\mathfrak{b}))}=V(\mathfrak{b}^c)$.

iv）如果 φ 是满同态，那么 φ^* 是从 Y 映到 X 的闭子集 V (Ker(φ)) 上的同胚.（特别，Spec(A) 和 Spec ($A/\mathfrak{N}$)

自然同胚，这里 $\mathfrak{N}$ 是 A 的小根。）

v）如果 φ 是单的，那么集合 $\varphi^*(Y)$ 在 X 中稠密．确切地说，$\varphi^*(Y)$ 在 X 中稠密 $\Longleftrightarrow \text{Ker}(\varphi)\subseteq\mathfrak{N}$.

vi）设 ψ: $B\to C$ 是另一环同态．那么 $(\psi\circ\varphi)^*=\varphi^*\circ\psi^*$.

vii）设 A 是具有唯一非零素理想 $\mathfrak{p}$ 的整环，再设 K 是 A 的分式域．令 $B=(A/\mathfrak{p})\times K$．按公式 $\varphi(x)=(\bar{x},x)$，这里 $\bar{x}$ 是 x 在 $A/\mathfrak{p}$ 中的象，来定义 φ: $A\to B$．证明 φ^* 是一一映射，但不是同胚.

22. 设 $A=\prod_{i=1}^{n}A_i$ 是环 A_i 的直积．证明 Spec (A) 是与 Spec (A_i) 自然同胚的两两不相交的开（且闭）子空间 x_i 的并.

反之，设 A 是任一环，证明以下诸条件等价：

i）空间 $X=\text{Spec}(A)$ 不连通.

ii）$A\cong A_1\times A_2$，而 A_1 和 A_2 这两个环都不是零环.

iii）A 含有不等于 0 和 1 的幂等元.

特别，局部环的谱总是连通的（习题 12）.

23. 设 A 是 Boole 环（习题 11）而 $X=\text{Spec}(A)$.

i）对每个 $f\in A$，集合 X_f（习题 17）在 X 中既开且闭.

ii）设 $f_1,\cdots,f_n\in A$．证明 $X_{f_1}\cup\cdots\cup X_{f_n}=X_f$ 对某个 $f\in A$.

iii）X_f 这些集合是 X 中仅有的既开且闭的子集．［设 Y 是 X 的既开且闭的一个子集．因为 Y 是开的，它可以表成一些主开集 X_f 的并．因为 Y 是闭的而 X 是拟紧的（习题 17），Y 也是拟紧的．因此 Y 是有限个主开集的并，再应用上面的 ii）.］

iv）X 是紧 Hausdorff 空间.

24. 设 L 是个格，它里面的两个元素 a 和 b 的 sup 和 inf 分别记作 $a\vee b$ 和 $a\wedge b$．L 叫做 Boole 格（或 Boole 代数），如果有：

i）在 L 中有最大元和最小元（分别将它们记作 1 和 0）.

ii）$\vee$，$\wedge$ 这两个运算中的每一个对于另一个都是分配的.

iii) 对于每个元素 $a\in L$ 存在着唯一的一个"补元" $a'\in L$ 具有性质 $a\vee a'=1$, $a\wedge a'=0$. (例如,一个集合的一切子集所组成的集,以包含关系为序,组成一个 Boole 格.)

设 L 是一 Boole 格. 在其中按下面的公式引进加法和乘法

$$a+b=(a\wedge b')\vee(a'\wedge b),\quad ab=a\wedge b.$$

验证 L 成为一个 Boole 环,将它记作 $A(L)$.

反过来,设 A 是个 Boole 环,在其中如下地引进序: $a\leqslant b$ 的意思是 $a=ab$. 证明对于这个序来说, A 是个 Boole 格. [运算 sup 和 inf 分别由公式 $a\vee b=a+b+ab$ 和 $a\wedge b=ab$ 确定,而补元由公式 $a'=1-a$ 确定.] 这样就建立了 Boole 环(的同构类)与 Boole 格(的同构类)之间的一个一一对应.

25. 从上面两个习题推出 Stone 定理: 任一 Boole 格都与某个紧 Hausdorff 拓扑空间的既开且闭的子集组成的格同构.

26. 设 A 是个环. A 的所有极大理想组成 Spec (A) 的一个子集,这个子集具有诱导拓扑,就是 Spec (A) 的一个子空间,叫做 A 的**极大谱**并记作 Max (A). 对任意交换环, Max (A) 并没有 Spec (A) 的那些好的函子性质(见习题 21),因为极大理想在环同态下的原象不一定是极大理想.

设 X 是紧 Hausdorff 空间, $C(X)$ 是定义在 X 上的所有实值连续函数组成的环(将两个函数的值相加和相乘来定义它们的和与积). 对于每个点 $x\in X$ 用 $\mathfrak{m}_x$ 记 $C(X)$ 中所有具有性质 $f(x)=0$ 的 f 组成的集合. 因为 $\mathfrak{m}_x$ 是将 $f\in C(X)$ 映到 $f(x)$ 这个满同态 $C(X)\to\mathbf{R}$ 的核,所以 $\mathfrak{m}_x$ 是个极大理想. 将 $\operatorname{Max}(C(X))$ 写作 $\tilde{X}$; 我们定义一个映射 $\mu: X\to\tilde{X}$, 即 $x\longmapsto\mathfrak{m}_x$. 证明 μ 是将 X 映到 $\tilde{X}$ 之上的同胚.

i) 设 $\mathfrak{m}$ 是 $C(X)$ 中的任一极大理想,并设 $V=V(\mathfrak{m})$ 是 $\mathfrak{m}$ 中函数的公共零点集: $V=\{x\in X\mid f(x)=0$ 对所有 $f\in\mathfrak{m}\}$.

假定 V 是空的. 那么对于每个点 $x\in X$, 存在着这样一

个元素 $f_x\in\mathfrak{m}$ 使得 $f_x(x)\neq 0$. 因为 f_x 是连续的, f_x 在点 x 的一个开邻域 U_x 上都不等于零. 因为 X 是紧的,有限个这种邻域,譬如说 $U_{x_1},\cdots,U_{x_n}$ 就覆盖 X. 令

$$f=f_{x_1}^2+f_{x_2}^2+\cdots+f_{x_n}^2,$$

那么 f 在 X 上处处都不等于 0,这就是说它是 $C(X)$ 中的可逆元,但这与 $f\in\mathfrak{m}$ 相矛盾. 因此 V 非空.

设 x 是 V 的一个点. 那么 $\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}_x$, 因为 $\mathfrak{m}$ 极大,所以 $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_x$, 因此 μ 是满的.

ii) 根据 Urysohn 引理(这是证明中必须应用的唯一的非显易的事实),连续函数把 X 的点区分开来,于是 $x\neq y\Longrightarrow \mathfrak{m}_x\neq\mathfrak{m}_y$, 因此映射 μ 是单的.

iii) 设 $f\in C(X)$. 令

$$U_f=\{x\in X\,|\,f(x)\neq 0\}$$

及

$$\widetilde{U}_f=\{\mathfrak{m}\in\widetilde{X}\,|\,f\notin\mathfrak{m}\}.$$

证明 $\mu(U_f)=\widetilde{U}_f$. 开集 U_f (相应的 $\widetilde{U}_f$) 组成 X (相应的 $\widetilde{X}$) 的拓扑的一组基,于是 μ 是同胚. 因此 X 可以从 $C(X)$ 重新构成.

仿射代数簇

27. 设 k 是个代数闭域,再设

$$f_\alpha(t_1,\cdots,t_n)=0$$

是系数属于 k 的 n 个变元的多项式方程组. k^n 中所有适合这些方程的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 所成的集合 X 叫作一个**仿射代数簇**.

考察所有具有性质 $g(x)=0$, 对一切 $x\in X$, 的多项式 $g\in k[t_1,\cdots,t_n]$ 所成的集合. 这个集合是多项式环中的一个理想 $I(X)$; 它叫做**簇** (variety) X **的理想**. 同余类环

$$P(X)=k[t_1,\cdots,t_n]/I(X)$$

是定义在 X 上的多项式函数环,因为两个多项式 g 和 h 定义 X

上的同一个函数，当且仅当 $g-h$ 在X的任一点上都取值 0，即 $g-h\in I(X)$.

将 t_i 在 $P(X)$ 中的象记作 ξ_i. ξ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是X上的**坐标函数** (coordinate function)：如果 $x\in X$，那么 $\xi_i(x)$ 就是点 x 的第 i 个坐标；$P(X)$ 作为 k 代数，就由这些坐标函数生成；它叫做X的**坐标环**(或仿射代数).

如同在习题 26 中那样，对任一点 $x\in X$ 用 $\mathfrak{m}_x$ 来记 $P(X)$ 中所有适合条件$f(x)=0$的函数 f 所组成的理想. 它是$P(X)$的一个极大理想. 因此，如果令 $\widetilde{X}=\operatorname{Max}(P(X))$，就定义了一个映射 $\mu: X\to\widetilde{X}$，即 $x\longmapsto\mathfrak{m}_x$.

不难证明，μ 是单的：如果 $x\neq y$，那么 $x_i\neq y_i$ 对某个$i(1\leqslant i\leqslant n)$，因此 ξ_i-x_i 属于 $\mathfrak{m}_x$，但不属于 $\mathfrak{m}_y$，于是 $\mathfrak{m}_x\neq\mathfrak{m}_y$. μ 还是满的，这一点虽不太显然，但仍然是对的. 这是 Hilbert 零点定理的一个形式(参看第七章).

28. 设 $f_1,\cdots,f_m$ 是 $k[t_1,\cdots,t_n]$ 中的元素. 它们定义一个**多项式映射** $\varphi: k^n\to k^m$：如果 $x\in k^n$，那么点 $\varphi(x)$ 的坐标就是 $f_1(x),\cdots,f_m(x)$.

设 X,Y 分别是 k^n, k^m 中的仿射代数簇. 映射 $\varphi:X\to Y$ 叫**正则的**，如果φ 是从 k^n 到 k^m 的一个多项式映射在X上的限制.

对于Y上的任一多项式函数 η，合成映射 $\eta\circ\varphi$ 是X上的多项式函数. 因此φ 诱导出 k-代数同态 $P(Y)\to P(X)$，即 $\eta\longmapsto\eta\circ\varphi$. 证明，这样我们得到了从$X$到$Y$的正则映射的集与从$P(Y)$到$P(X)$的 k-代数同态的集之间的一个一一对应.

第二章　模

近代处理交换代数的方法的特点之一就在于较多地强调了模的作用，而不只是理想的作用．由于这个缘故使叙述更加清晰和简单．例如，环A的理想$\mathfrak{a}$和它的商环$A/\mathfrak{a}$都是A上的模，因此在一定程度上可以在同等的地位上来讨论．在这一章里给出了模的定义并研究了模的初等性质．此外，简略地讨论了张量积和它们在正合序列中的动态．

模和模同态

设A是个环(总是交换的)；一个交换群M(其中的运算写作加法)，如果A线性地作用在它上面，就叫作一个A-模．确切地说，模是一个对(M,μ)，这里M是个交换群，而μ是个映射$A\times M\to M$，它满足以下公理，在其中我们把$\mu(a,x)$ $(a\in A, x\in M)$写作ax：

$$
\begin{aligned}
a(x+y)&=ax+ay,\\
(a+b)x&=ax+bx,\\
(ab)x&=a(bx),\\
1x&=x \qquad (a,b\in A;\ x,y\in M).
\end{aligned}
$$

(一个等价的定义是：M是个交换群，同时有一个环同态$A\to E(M)$，这里$E(M)$是交换群M的自同态环．)

如下面的例子所指明的那样，模的概念是一些熟知的概念的推广：

例．1) 环A的任意理想$\mathfrak{a}$是一个A-模；特别，A本身是一个A-模．

2) 如果A是域k，那么A-模$=k$-向量空间．

3) $A=\mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}$-模＝交换群.（定义 $nx=\underbrace{x+\cdots+x}_{n\text{个}}$.）

4) $A=k[x]$，其中 k 是一个域；一个 A-模就是带有一个线性变换的 k-向量空间.

5) $G=$ 有限群，$A=k[G]=G$ 在域 k 上的群代数（只在群 G 是交换群时，这个环才是交换的）. 那么给了一个 A-模就等于给了 G 的一个 k-表示.

设 M 和 N 是两个 A-模，映射 $f: M\to N$ 叫做 **A-模同态**（或 **A-线性映射**），如果对一切 $a\in A$ 和 $x, y\in M$，

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$
$$f(ax)=af(x).$$

因此 f 是交换群的同态，而它与每个 $a\in A$ 的作用都交换. 如果 A 是个域，那么 A-模同态就与向量空间的线性变换是一回事.

A-模同态的合成仍是 A-模同态.

从 M 到 N 中的所有 A-模同态所成的集合可以成为一个 A-模，如果按下面的公式来定义 $f+g$ 和 af：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$
$$(af)(x)=af(x)$$

对一切 $x\in M$. 不难验证 A-模的公理都适合. 这个 A-模记作 $\mathrm{Hom}_A(M,N)$（或简记作 $\mathrm{Hom}(M,N)$，如果关于环 A 没有疑义的话）.

同态 $u: M'\to M$ 和 $v: N\to N''$ 导出映射 $\bar{u}$: $\mathrm{Hom}(M,N)\to\mathrm{Hom}(M',N)$，$\bar{v}$: $\mathrm{Hom}(M,N)\to\mathrm{Hom}(M,N'')$，

$$\bar{u}(f)=f\circ u,\quad \bar{v}(f)=v\circ f.$$

这两个映射都是 A-模同态.

对于任意 A-模 M，有自然同构 $\mathrm{Hom}(A,M)\cong M$：每个 A-模同态 $f: A\to M$ 由元素 $f(1)$ 所唯一确定，而这个元素可以任意选取.

子 模 和 商 模

模 M 的**子模** M' 是 M 的子群，它对于以 A 的元素来乘的运算是封闭的. 这时，如果在交换群 M/M' 上按公式

$$a(x+M')=ax+M'$$

来定义乘法，A-模的结构就搬到商群 M/M' 上来. A-模 M/M' 叫做 M 对于 M' 的**商模**. 从 M 到 M/M' 之上的自然映射是 A-模同态. 在 M 的包含 M' 的子模所成的集合与 M/M' 的子模的集合之间存在着保持包含关系的一一对应(由此作为特例推出对于理想对应的断言).

设 $f: M\to N$ 是 A-模同态，它的**核**定义为集合

$$\mathrm{Ker}(f)=\{x\in M\,|\,f(x)=0\},$$

它是 M 的子模. f 的**象**定义为集合

$$I_m(f)=f(M),$$

它是 N 的子模. f 的**余核**定义为集合

$$\mathrm{Coker}(f)=N/\mathrm{Im}(f),$$

它是 N 的一个商模.

如果 M' 是 M 的子模而 $M'\subseteq\mathrm{Ker}(f)$，那么 f 诱导出同态 $\bar{f}: M/M'\to N$，它是这样定义的：如果 $\bar{x}\in M/M'$ 是元素 $x\in M$ 的象，那么 $\bar{f}(\bar{x})=f(x)$. $\bar{f}$ 的核是 $\mathrm{Ker}(f)/M'$. 这就是说，同态 $\bar{f}$ 由同态 f **诱导**出来. 特别，令 $M'=\mathrm{Ker}(f)$，我们有一个 A-模同构

$$M/\mathrm{Ker}(f)\cong\mathrm{Im}(f).$$

子 模 上 的 运 算

在第一章里所讨论的理想上的大多数运算都能推广到模上来. 设 M 是个 A-模，$(M_i)_{i\in I}$ 是它的一组子模. 它们的**和** $\sum M_i$ **定义为所有(有限)和** $\sum x_i$ 的集合，其中 $x_i\in M_i$ 对一切 $i\in I$

而几乎所有的(即除有限个外，所有的) x_i 都等于0；$\sum M_i$ 是 M 的包含所有 M_i 的最小子模. **交** $\cap M_i$ 也是M的子模. 因此M的子模对于包含关系来说组成一个完备格.

命题 2.1. i) 设 $L \supseteq M \supseteq N$,它们都是 A-模. 那么

$$(L/N)/(M/N) \cong L/M.$$

ii) 设 M_1, M_2 是M的子模,那么

$$(M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2/M_1 \cap M_2.$$

证明. i) 用公式 $\theta(x+N) = x+M$ 来定义映射 θ: $L/N \to L/M$. 这个定义是合理的,而且 θ 是从 A-模 L/N 映到 L/M 上的同态,它的核是 M/N, 由此即推出 i).

ii) 同态的合成

$$M_2 \to M_1 + M_2 \to (M_1 + M_2)/M_1$$

是满的,它的核等于 $M_1 \cap M_2$, 由此推出 ii). ■

通常不能定义两个子模的积,但是可以定义**积** $\mathfrak{a}M$,这里 $\mathfrak{a}$ 是个理想而M是个 A-模; 它是一切可能的有限和 $\sum a_i x_i$ 所组成的集合,其中 $a_i \in \mathfrak{a}$, $x_i \in M$; 它是M的子模.

如果N和P是M的两个子模, 定义 $(N:P)$ 为使 $aP \subseteq N$ 的那些 $a \in A$ 所组成的集合; 它是A的**理想**. 特别, $(0:M)$ 是使 $aM = 0$ 的那些 $a \in A$ 所成的集合, 它叫做 M 的**零化子**(annihilator). 记作 $\mathrm{Ann}(M)$. 如果 $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ann}(M)$, 那么$M$可以看作 $A/\mathfrak{a}$-模: 设 $\bar{x} \in A/\mathfrak{a}$ 的代表元是 $x \in A$; 那么定义 $\bar{x}m = xm(m \in M)$. 因为 $\mathfrak{a}M = 0$, 所以 $\bar{x}m$ 这个元素不依赖于同余类 $\bar{x}$ 的代表元 x 的选取.

A-模M叫**忠实的**,如果 $\mathrm{Ann}(M) = 0$. 如果 $\mathrm{Ann}(M) = \mathfrak{a}$, 那么$M$看作 $A/\mathfrak{a}$-模,是忠实的.

习题 2.2. i) $\mathrm{Ann}(M+N) = \mathrm{Ann}(M) \cap \mathrm{Ann}(N)$.

ii) $(N:P) = \mathrm{Ann}((N+p)/N)$.

设 x 是M的任意一个元素, 所有它的倍元 ax $(a \in A)$ 的集合是 M 中的一个子模, 我们把它记作 Ax 或 (x). 如果

$M=\sum_{i\in I}Ax_i$，那么 x_i 这组元素就叫作M的**一组生成元**．这就是说，M中的每个元素都可以表成(但不必唯一地表成)元素 x_i 的系数属于A的有限线性组合，A-模M叫作**有限生成的**，如果它里面存在着有限生成元组．

直 和 与 直 积

A-模M和N的直和 $M\oplus N$ 指的是所有的对 (x, y) 的集合，这里 $x\in M$，$y\in N$．如果按显然方式定义加法和乘法：

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2),$$

$$a(x, y)=(ax, ay),$$

它就成为一个 A-模，更一般些，设 $(M_i)_{i\in I}$ 是任意一组 A-模．它们的**直和** $\bigoplus_{i\in I}M_i$ 是由所有形如 $(x_i)_{i\in I}$ 的元素所组成的集合，这里 $x_i\in M_i$ 对一切 $i\in I$ 而几乎所有的 x_i 都等于 0．如果把后面这个限制取消，就得到直积 $\prod_{i\in I}M_i$．因此，如果 I 是有限集，直和就与直积重合，但在一般情形二者相异．

假定环A是个直积 $\prod_{i=1}^{n}A_i$ (第一章)．这时所有形如

$$(0,\cdots 0, a_i, 0,\cdots, 0)\in A$$

的元素，其中 $a_i\in A_i$，是A中的**理想** $\mathfrak{a}_i$ (但除开平凡的情形，它不是A的**子环**，因为它不含有A的单位元素)．环 A，看作 A-模，就是理想 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 的直和，反过来，如果给了环A作为 A-模分成理想直和的分解

$$A=\mathfrak{a}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{a}_n,$$

那么

$$A\cong\prod_{i=1}^{n}(A/\mathfrak{b}_i),$$

其中 $\mathfrak{b}_i=\bigoplus_{j\neq i}\mathfrak{a}_j$．每个理想 $\mathfrak{a}_i$ 都是(与 $A/\mathfrak{b}_i$ 同构的)环．$\mathfrak{a}_i$ 的单

位元 e_i 是A中的幂等元，而 $\mathfrak{a}_i=(e_i)$.

有限生成的模

自由 A–模是同构于形如 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 的 A–模的一个 A–模，这里所有 M_i (作为A模)都同构于A. 这样一个模有时记作 $A^{(I)}$. 因此有限生成的自由 A–模同构于 $A\oplus\cdots\oplus A$ (n 个直和项)，并记作 A^n(按惯例，约定 A^0 为零模，记作 0).

命题 2.3. A–模M是有限生成的 $\Longleftrightarrow$ M同构于模A^n的一个商模，对某个 $n>0$.

证明. $\Rightarrow$: 设 $x_1,\cdots x_n$ 生成M. 定义映射 $\varphi: A^n\to M$，即 $\varphi(a_1,\cdots,a_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$. 这是个 A–模的满同态，因此 $M\cong A^n/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

$\Leftarrow$: 这时存在着 A–模的满同态 φ: $A^n\to M$. 令 $e_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$(第 i 个位置是 1). 那么 $e_i(1\leqslant i\leqslant n)$生成$A^n$，因而 $\varphi(e_i)$ 生成M. ∎

命题 2.4. 设M是有限生成的 A–模，$\mathfrak{a}$是A的一个理想，φ是 A–模M的这样一个自同态，使得 $\varphi(M)\subseteq\mathfrak{a}M$. 那么$\varphi$适合以下形状的一个方程

$$\varphi^n+a_1\varphi^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

其中所有 a_i 都属于$\mathfrak{a}$.

证明. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是M的一组生成元. 那么 $\varphi(x_i)\in\mathfrak{a}M$ 对一切 i，因此 $\varphi(x_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ ($1\leqslant i\leqslant n$, $a_{ij}\in\mathfrak{a}$) 或

$$\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}\varphi-a_{ij})x_j=0,$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号. 将这个方程组从左方乘以 $(\delta_{ij}\varphi-a_{ij})$ 的伴随矩阵，就得到 $\det(\delta_{ij}\varphi-a_{ij})$ 零化一切 x_i. 因此 $\det(\delta_{ij}\varphi-a_{ij})$ 是M的零自同态，将这个行列式展开就得到所要求的形状的一个方程. ∎

系理 2.5. 设 M 是有限生成的 A-模，而 $\mathfrak{a}$ 是 A 的这样一个理想，使得 $\mathfrak{a}M = M$. 那么存在着一个元素 $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ 使得 $xM = 0$.

证明. 在 (2.4) 中取 $\varphi =$ 恒同映射，$x = 1 + a_1 + \cdots + a_n$. ■

命题 2.6. (Nakayama 引理). 设 M 是有限生成的 A-模，而 $\mathfrak{a}$ 是 A 的一个包含在 A 的大根 $\mathfrak{R}$ 中的理想. 如果 $\mathfrak{a}M = M$，则 $M = 0$.

第一个证明. 根据(2.5)，$xM = 0$ 对某个 $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{R}}$. 由(1.9)推出，$x$ 是 A 中可逆元，因此 $M = x^{-1}xM = 0$. ■

第二个证明. 假定 $M \neq 0$，并设 $u_1, \cdots, u_n$ 是 M 的一个极小生成元组. 那么 $u_n \in \mathfrak{a}M$，因此有形如 $u_n = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n$ 的等式成立，其中 $a_i \in \mathfrak{a}$. 由此得到

$$(1 - a_n)u_n = a_1u_1 + \cdots + a_{n-1}u_{n-1}.$$

因为 $a_n \in \mathfrak{R}$，从(1.9)推出 $1 - a_n$ 是 A 中可逆元. 于是 u_n 属于由 $u_1, \cdots, u_{n-1}$ 生成的 M 的子模中，我们得到一个矛盾. ■

系理 2.7. 设 M 是有限生成 A-模，N 是 M 的一个子模，$\mathfrak{a}$ 是 A 的一个包含在 $\mathfrak{R}$ 中的理想，那么

$$M = \mathfrak{a}M + N \Longrightarrow M = N.$$

证明. 将(2.6)应用到 M/N 上并考虑到

$$\mathfrak{a}(M/N) = (\mathfrak{a}M + N)/N. \quad ■$$

设 A 是个局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想，$k = A/\mathfrak{m}$ 是它的同余类域，M 是一个有限生成的 A-模. 因为 $\mathfrak{m}$ 零化 $M/\mathfrak{m}M$，所以 $M/\mathfrak{m}M$ 又自然地看成 $A/\mathfrak{m}$ 模，即 k-向量空间. 它是有限维的.

命题 2.8. 设 $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 M 的一组元素，它们在 $M/\mathfrak{m}M$ 中的象组成这个向量空间的一组基，那么 x_i 生成 M.

证明. 设 N 是由 x_i 这些元素生成的 M 的子模，那么合成映射 $N \to M \to M/\mathfrak{m}M$ 将 N 映到 $M/\mathfrak{m}M$ 之上. 因此 $N + \mathfrak{m}M = M$，而根据(2.7)就有 $N = M$.

正 合 序 列

一个 A-模和 A-同态的序列

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots \tag{0}$$

叫做**在 M_i 处正合**，如果 $\operatorname{Im}(f_i)=\operatorname{Ker}(f_{i+1})$. **它叫做正合序列**，如果它在每个 M_i 处都正合. 特别

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \text{ 正合} \Longleftrightarrow f \text{ 是单的;} \tag{1}$$

$$M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ 正合} \Longleftrightarrow g \text{ 是满的;} \tag{2}$$

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \text{ 正合} \Longleftrightarrow f \text{ 是单的，} g \text{ 是满的，} \tag{3}$$

而且诱导出从 $\operatorname{Coker}(f)=M/f(M')$ 到 M'' 上的同构.

形如(3)的序列叫做**短正合序列**，任意长的正合序列(0)可以按以下方式分裂成一些短正合序列：令 $N_i=\operatorname{Im}(f_i)=\operatorname{Ker}(f_{i+1})$. 那么就得到短正合序列 $0 \to N_i \to M_i \to N_{i+1} \to 0$ 对一切 i.

命题 2.9. i）设

$$M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{v} M'' \to 0 \tag{4}$$

是一个 A-模和 A-同态的序列. 那么序列(4)正合 $\Leftrightarrow$ 对一切 A-模 N，序列

$$0 \to \operatorname{Hom}(M'', N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M', N) \tag{4'}$$

都正合.

ii）设

$$0 \to N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N'' \tag{5}$$

是一个 A-模和 A-同态的序列，那么序列(5)正合 $\Leftrightarrow$ 对一切 A-模 M，序列

$$0 \to \operatorname{Hom}(M, N') \xrightarrow{\bar{u}} \operatorname{Hom}(M, N) \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{Hom}(M, N'') \tag{5'}$$

都正合.

这个命题的四部分都是容易的习题. 例如，假定(4′)对一切 N 来说正合. 首先，因为 $\bar{v}$ 对于一切 N 来说都是单的，因此 v 是满的. 其次，我们有 $\bar{u}\circ\bar{v}=0$，即对一切 $f: M'' \to N$，都有 $f\circ v\circ u=0$.

取 M'' 作为 N，并取恒同映射作为 f，就得到 $v\circ u=0$；因此 $\mathrm{Im}(u)\subseteq \mathrm{Ker}(v)$。再取 $N=M/\mathrm{Im}(u)$，并令 $\varphi: M\to N$ 是自然映射，那么 $\varphi\in \mathrm{Ker}(\bar{u})$。因此存在着这样一个映射 $\psi: M''\to N$ 使得 $\varphi=\psi\circ v$。于是 $\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Ker}(\varphi)\supseteq \mathrm{Ker}(v)$。 ■

命题 2.10. 设

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\
0 & \to & N' & \xrightarrow[u']{} & N & \xrightarrow[v']{} & N'' & \to & 0
\end{array}$$

是一个 A-模和 A-同态的交换图表，它里面两行都是正合的。那么存在着正合序列

$$0\to \mathrm{Ker}(f')\xrightarrow{\bar{u}}\mathrm{Ker}(f)\xrightarrow{\bar{v}}\mathrm{Ker}(f'')\xrightarrow{d}$$
$$\mathrm{Coker}(f')\xrightarrow{\bar{u}'}\mathrm{Coker}(f)\xrightarrow{\bar{v}'}\mathrm{Coker}(f'')\to 0, \tag{6}$$

其中 $\bar{u}$，$\bar{v}$ 分别是 u，v 的限制，而 $\bar{u}'$，$\bar{v}'$ 分别由 u'，v' 诱导出来。

边缘同态 (boundary homomorphism) d 按以下方式来定义：如果 $x''\in \mathrm{Ker}(f'')$，那么 $x''=v(x)$ 对某个 $x\in M$，而 $v'(f(x))=f''(v(x))=0$。因此 $f(x)\in \mathrm{Ker}(v')=\mathrm{Im}(u')$，于是 $f(x)=u'(y')$ 对某个 $y'\in N'$。那么定义 $d(x'')$ 为 y' 在 $\mathrm{Coker}(f')$ 中的象。这个定义的合理性和序列 (6) 的正合性的验证是图表追踪中的一个简单习题，我们留给读者。 ■

注记．序列 (6) 是同调代数中正合同调序列的一个特殊情形．

现在设 C 是 A-模的一个类，而 λ 是定义在 C 上而在 $\mathbf{Z}$ 中(或更一般地，在一个交换群 G 中) 取值的一个函数，函数 λ 叫作**加性函数**，如果对于各项都属于 C 的每个短正合序列(3)，都有

$$\lambda(M')-\lambda(M)+\lambda(M'')=0.$$

例．设 A 是域 k，C 是所有有限维 k-向量空间 V 所成的类．那么 $V\longmapsto \dim V$ 是定义在 C 上的加性函数．

命题 2.11. 设 $0 \to M_0 \to M_1 \to \cdots \to M_n \to 0$ 是一个 A-模的正合序列，其中所有的模 M_i 和所有同态的核都属于 C。那么对于任一定义在 C 上的加性函数 λ，都有

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\lambda(M_i) = 0.$$

证明。把我们的序列分裂成一些短正合序列

$$0 \to N_i \to M_i \to N_{i+1} \to 0$$

$(N_0 = N_{n+1} = 0)$. 那么 $\lambda(M_i) = \lambda(N_i) + \lambda(N_{i+1})$. 现在造 $\lambda(M_i)$ 的交错和，所有右方的项都消掉了. ■

模的张量积

计 M, N, P 是三个A-模. 映射$f: M \times N \to P$叫做**A-双线性的**，如果对于每一个 $x \in M$，从N到 P 中的映射 $y \longmapsto f(x,y)$是 A-线性的，而且对于每一个 $y \in N$，从M到 P 中的映射 $x \longmapsto f(x, y)$ 是 A-线性的。

我们要造一个 A-模 T，叫做M和N的**张量积**，它具有下述性质：对所有 A-模 P，A-双线性映射 $M \times N \to P$ 的集与A线性映射 $T \to P$ 的集之间有着自然的一一对应，确切地说，有

命题 2.12. 设 M, N 是两个 A-模. 那么存在由一个 A-模 T和一个 A-双线性映射 $g: M \times N \to T$ 所构成的对 (T, g)，具有以下性质:

对任意 A-模 P和任意 A-双线性映射 $f: M \times N \to P$，都存在着唯一的一个 A-线性映射 $f': T \to P$ 使得 $f = f' \circ g$ (换句话说，$M \times N$ 的任一双线性映射都可以通过T分解).

更进一步，如果 (T, g) 和 (T', g') 是具有这个性质的两个对，那么存在着唯一的一个同构 $j: T \to T'$ 使得 $j \circ g = g'$.

证明. i) 唯一性. 用 (T', g')来代替 (p, f)，我们得到唯一的一个映射 $j: T \to T'$ 使得 $g' = j \circ g$. 交换T和 T' 的地位，又得到一个映射 $j': T' \to T$ 使得 $g = j' \circ g'$. $j \circ j'$ 和 $j' \circ j$ 这两个合

成映射都必须是恒同映射，因此 i 是同构.

ii）存在性. 用 C 表自由 A-模 $A^{(M\times N)}$. C 的元素都是 $M\times N$ 的元素的形式的线性组合，系数属于 A. 即它们是形如 $\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i, y_i)$ 的表示式 $(a_i\in A,\ x_i\in M,\ y_i\in N)$.

设 D 是 C 中所有以下形状

$$(x+x', y)-(x, y)-(x', y)$$
$$(x, y+y')-(x, y)-(x, y')$$
$$(ax, y)-a(x, y)$$
$$(x, ay)-a(x, y)$$

的元素生成的 C 的子模.

令 $T=C/D$. 将 C 的每个基元素 (x, y) 在 T 中的象记作 $x\otimes y$. 那么 T 这个模就由所有形状如 $x\otimes y$ 的元素生成，并且从定义可知它们适合关系式

$$\begin{cases}(x+x')\otimes y = x\otimes y + x'\otimes y,\\ x\otimes(y+y') = x\otimes y + x\otimes y',\\ (ax)\otimes y = x\otimes ay = a(x\otimes y).\end{cases}$$

换句话说，按公式 $g(x, y)=x\otimes y$ 定义的映射 $g: M\times N\to T$ 是 A-双线性的.

从 $M\times N$ 到 A-模 P 中的任一映射 f 都可以线性地扩充成 A-模同态 $\bar{f}$: $C\to P$. 如果 f 还是 A-双线性的，那么 $\bar{f}$ 就把 D 的生成元都映成 0，因而把整个 D 都映到 0. 于是 $\bar{f}$ 诱导出一个唯一确定的从 $T=C/D$ 到 D 中的 A-同态 f'，使得 $f'(x\otimes y)=f(x, y)$. 因此 (T, g) 这一对就适合命题中所述的条件. ■

注记. i）上面造的模 T 叫做 M 和 N 这两个模的**张量积**，记作 $M\otimes_A N$；如果关于环 A 并没有疑义的话，就简记作 $M\otimes N$. $M\otimes N$ 作为 A-模，由“乘积” $x\otimes y$ 生成，如果分别给了 M 和 N 的两组生成元 $(x_i)_{i\in I}$，$(y_j)_{j\in J}$，那么 $x_i\otimes y_j$ 这些元素就生成 $M\otimes N$. 特别，如果 M 和 N 都是有限生成的，那么 $M\otimes N$ 也是有限生成的.

ii）符号 $x\otimes y$ 是自然含混不清的，除非指明这个元素属于那个张量积．譬如说，令 M' 和 N' 分别是M和N的子模而 $x\in M'$，$y\in N'$．那么可以发生： $x\otimes y$ 作为 $M\otimes N$ 的元素等于 0，而作为 $M'\otimes N'$ 的元素不等于 0． 例如，取 $A=\mathbf{Z}$，$M=\mathbf{Z}$，$N=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 并设 $M'=2\mathbf{Z}\subset\mathbf{Z}$，$N'=N$． 用 x 记N中非 0 元并考察乘积 $2\otimes x$． 它在 $M\otimes N$ 中等于 0，这是因为 $2\otimes x=1\otimes 2x=1\otimes 0=0$．但是它在 $M'\otimes N'$ 中不等于 0，参看(2.18)之后的例子．

然而下面这个结果成立：

系理 2.13. 设 $x_i\in M$，$y_i\in N$ 使得在 $M\otimes N$ 中 $\sum x_i\otimes y_i=0$． 那么存在着有限生成的子模 $M_0\subset M$，$N_0\subset N$ 使得在 $M_0\otimes N_0$ 中 $\sum x_i\otimes y_i=0$．

证明．设在 $M\otimes N$ 中 $\sum x_i\otimes y_i=0$． 沿用（2.12）的证明中的记号，这时有 $\sum(x_i, y_i)\in D$，因此 $\sum(x_i, y_i)$是子模D的生成元的一个有限线性组合． 用 M_0 表M的一个子模，它由所有这些 x_i 和在D的这些生成元中作为第一个坐标出现的 M 的所有元素所生成．类似地定义 N_0，那么在 $M_0\otimes N_0$ 中 $\sum x_i\otimes y_i=0$． ■

iii）（2.12）中所给的张量积的造法对我们来说以后不再需要，读者愿意的话可以放心地忘记它．真正重要的是要记住张量积的定义性质．

iv）我们也可以不从双线性映射，而从多线性映射 $f: M_1\times\cdots\times M_r\to P$ 开始讨论，而多线性映射可类似地定义（对每个变元都线性）．重复（2.12）的证明，我们就造出了“多重张量积” $T=M_1\otimes\cdots\otimes M_r$，它由形状如 $x_1\otimes\cdots\otimes x_r$（$x_i\in M_i$，$1\leqslant i\leqslant r$）的一切可能的乘积生成． 我们把细节留给读者补出来；相应(2.12)的结果是

命题 2.12.* 设 $M_1,\cdots, M_r$ 是一些 A-模．那么存在着由一个 A-模T和一个 A-多线性映射 $g: M_1\times\cdots\times M_r\to T$ 构成的对（T，g），具有以下性质：

对于任意 A-模 P 和任意 A-多线性映射 $f: M_1 \times \cdots \times M_r \to P$，存在唯一的一个 A-同态 $f': T \to P$ 使得 $f' \circ g = f$.

如果 (T, g) 和 (T', g') 是具有这个性质的两个对，那么存在着唯一的一个同构 $j: T \to T'$ 使得 $j \circ g = g'$. ■

张量积有各种各样所谓的 "典范同构"，我们现在列举一部分:

命题 2.14. 设 M, N, P 是 A-模，那么存在着唯一确定的同构

i) $M \otimes N \to N \otimes M$,

ii) $(M \otimes N) \otimes P \to M \otimes (N \otimes P) \to M \otimes N \otimes P$,

iii) $(M \oplus N) \otimes P \to M \otimes P \oplus N \otimes P$,

iv) $A \otimes M \to M$,

使得分别有

a) $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$,

b) $(x \otimes y) \otimes z \longmapsto x \otimes (y \otimes z) \longmapsto x \otimes y \otimes z$,

c) $(x, y) \otimes z \longmapsto (x \otimes z, y \otimes z)$,

d) $a \otimes x \longmapsto ax$.

证明. 在每一个情形，主要之点是要证明所陈述的映射存在而且唯一被确定，为此必须构造相应的双线性或多线性映射并利用性质 2.12 或 2.12 * 来证明张量积的同态的存在. 作为这个方法的一个例子我们来证明断言 ii) 的一半，而把其余的留给读者.

我们来造同态

$$(M \otimes N) \otimes P \xrightarrow{f} M \otimes N \otimes P \xrightarrow{g} (M \otimes N) \otimes P,$$

使得

$$f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z,$$
$$g(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

对一切 $x \in M, y \in N, z \in P$.

为了造 f，先固定元素 $z \in P$. 映射 $(x, y) \longmapsto x \otimes y \otimes z$ $(x \in M, y \in N)$ 对于 x 和 y 是双线性的，因而诱导出一个同态

$$f_z: M \otimes N \to M \otimes N \otimes P,$$

使得 $f_z(x \otimes y) = x \otimes y \otimes z$. 其次考察从 $(M \otimes N) \times P$ 到 $M \otimes N \otimes P$ 中的映射 $(t, z) \longmapsto f_z(t)$. 它对于 t 和 z 是双线性的,因而诱导出同态

$$f: (M \otimes N) \otimes P \to M \otimes N \otimes P,$$

使得 $f((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes y \otimes z$.

为了造 g, 考察从 $M \times N \times P$ 到 $(M \otimes N) \otimes P$ 的映射 $(x, y, z) \longmapsto (x \otimes y) \otimes z$. 它对于每个变元都是线性的,因而诱导出同态

$$g: M \otimes N \otimes P \longmapsto (M \otimes N) \otimes P,$$

使得 $g(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.

显然, $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 都是恒同映射,因此 f 和 g 都是同构. ■

习题 2.15. 设 A 和 B 是环, M 是一个 A-模, P 是一个 B-模, 而 N 是一个 (A, B)-双模(即同时赋予 N 一个 A-模结构和一个 B-模结构. 而它们在以下意义下是协调的: $a(xb) = (ax)b$ 对一切 $a \in A, b \in B, x \in N$). 那么 $M \otimes_A N$ 有自然的 B-模结构, 而 $N \otimes_B P$ 有 A-模结构,同时在这些条件下,

$$(M \otimes_A N)_B \otimes P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P).$$

设 $f: M \to M'$ 和 $g: N \to N'$ 都是 A-模同态. 令 $h(xy) = f(x) \otimes g(x)$, 就定义了一个映射 $h: M \times N \to M' \otimes N'$. 容易验证 h 是 A-双线性的,因此诱导出 A-模同态

$$f \otimes g: M \otimes N \to M' \otimes N',$$

使得

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) \qquad (x \in M, y \in N).$$

再设 $f': M' \to M''$ 和 $g': N' \to N''$ 是 A-模同态. 那么显然,合成映射 $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$ 和 $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$ 在 $M \otimes N$ 中形如 $x \otimes y$ 的所有元素上都一致,因为这些元素生成 $M \otimes N$, 所以推出

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

纯量的局限和扩充

设 $f: A\to B$ 是个环同态，N是个 B-模．那么N有一个 A-模结构，它定义如下：如果 $a\in A$而 $x\in N$，定义 $ax=f(a)x$．我们说这个 A-模是从N经**纯量局限**而得到．特别，用这种方法 f 还在B上定义了一个 A-模结构．

命题 2.16. 假定N作为 B-模是有限生成的，而环B作为 A-模也是有限生成的，那么N作为 A-模也是有限生成的．

证明．设 $y_1,\cdots,y_n$ 在B上生成 N，而 $x_1,\cdots,x_m$ 生成作为 A-模的 B．那么 mn 个乘积 x_iy_j 在A上生成 N． ■

现在设M是一个 A-模．因为，如适才所说的那样，B可以看作是个 A-模，我们可以造一个 A-模 $M_B=B\otimes_A M$．我们定义 $b(b'\otimes x)=bb'\otimes x$ 对一切 $b,b'\in B$，$x\in M$，那么 M_B 就有一个B-模结构．我们说 B-模 M_B 从M经**纯量扩充**而得到．

命题 2.17. 如果M作为 A-模是有限生成的，那么 M_B 作为 B-模也是有限生成的．

证明．如果 $x_1,\cdots,x_m$ 生成 A-模 M，那么 $1\otimes x_i$ 这些元素生成 B-模 M_B． ■

张量积的正合性

设 $f: M\times N\to P$ 是个 A-双线性映射．对于每个 $x\in M$，从N映入P的映射 $y\longmapsto f(x,y)$ 是A-线性的，因此 f 诱导出一个映射 $M\to\mathrm{Hom}(N,P)$，它是 A-线性的，这是因为 f 对于 x 是线性的．反过来，任一 A-同态 φ: $M\to\mathrm{Hom}_A(N,P)$ 都定义一个双线性映射：$(x,y)\longmapsto\varphi(x)(y)$．因此所有 A-双线性映射 $M\times N\to P$ 所成的集 S 与 $\mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(N,P))$ 自然地一一对应．另一方面，根据张量积的基本性质，S 又与 $\mathrm{Hom}(M\otimes N,P)$一一对应．因此有典范同构

$$\operatorname{Hom}(M\otimes N, P)\cong \operatorname{Hom}(M, \operatorname{Hom}(N, P)). \qquad (1)$$

命题 2.18. 设

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0, \qquad (2)$$

是一个 A-模和 A-同态的正合序列，而N是任意 A-模。那么序列

$$M'\otimes N \xrightarrow{f\otimes 1} M\otimes N \xrightarrow{g\otimes 1} M''\otimes N \to 0 \qquad (3)$$

(这里 1 是N的恒同映射)也正合。

证明. 将序列(2)记作 E，而将序列(3)记作 $E\otimes N$，设 P是任一 A-模. 由(2)的正合性，根据(2.9)，推出序列 $\operatorname{Hom}(E, \operatorname{Hom}(N, P))$ 的正合性，根据(1)可知序列 $\operatorname{Hom}(E\otimes N, P)$ 正合. 再应用(2.9)，得到序列 $E\otimes N$ 正合. ■

注记. i) 设 $T(M)=M\otimes N$ 而 $U(P)=\operatorname{Hom}(N,P)$. 这时 (1) 就有形状 $\operatorname{Hom}(T(M),P)=\operatorname{Hom}(M,U(P))$ 对一切 A-模M和 P. 用范畴论的语言，这就是说，函子T是U的左伴随，而U是T的右伴随. (2.18)的证明指出，任一函子，如果是一个左伴随，就右正合. 同样，任一函子，如果是一个右伴随. 就左正合.

ii) 在一般情形，从一个 A-模和 A-同态的正合序列 $M'\to M\to M''$ 利用与任一 A-模 N 作张量积的方法得到的序列 $M'\otimes N\to M\otimes N\to M''\otimes N$ 可能会失去正合性.

例. 令 $A=\mathbf{Z}$ 并考察正合序列 $0\to\mathbf{Z}\xrightarrow{f}\mathbf{Z}$，这里$f(x)=2x$ 对一切 $x\in\mathbf{Z}$. 将它与 $N=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 作张量积，就得到序列 $0\to\mathbf{Z}\otimes N\xrightarrow{f\otimes 1}\mathbf{Z}\otimes N$，**它不是正合的**，这是因为对于任一 $x\otimes y\in\mathbf{Z}\otimes N$ 有

$$(f\otimes 1)(x\otimes y)=2x\otimes y=x\otimes 2y=x\otimes 0=0,$$

因此 $f\otimes 1$ 是零映射，然而 $\mathbf{Z}\otimes N\neq 0$.

因此，在 A-模和 A-同态的范畴上，函子 T_N: $M\longmapsto M\otimes_A N$ 一般说来不正合. 如果 T_N 正合，即如果与N作张量积将正合序列变到正合序列，那么N叫做**平坦** (flat) A-模.

命题 2.19. A-模N的下列各性质是等价的:

i) N 是平坦模.

ii) 对任一 A-模的正合序列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 作过张量积的序列 $0 \to M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$ 也正合.

iii) 如果同态 $f: M' \to M$ 是单的, 那么 $f \otimes 1: M' \otimes N \to M \otimes N$ 也是单的.

iv) 如果同态 $f: M' \to M$ 是单的,而M和 M' 都是有限生成的,那么 $f \otimes 1: M' \otimes N \to M \otimes N$ 也是单的.

证明. i)$\Longleftrightarrow$ii) 可以通过将长正合序列分裂成短正合序列的方法来验证.

ii)$\Longleftrightarrow$iii). 由(2.18)推出.

iii)$\Longrightarrow$iv). 显然.

iv)$\Longrightarrow$iii). 设 $f: M' \to M$ 是单的,并设 $u = \sum x'_i \otimes y_i \in \operatorname{Ker}(f \otimes 1)$, 那么在 $M \otimes N$ 中有 $\sum f(x'_i) \otimes y_i = 0$. 用 M'_0 记 M' 中的由 x'_i 这些元素生成的子模, 而用 u_0 记作为 $M'_0 \otimes N$ 中元素的 $\sum x'_i \otimes y_i$. 根据(2.14), 在M中存在着一个有限生成的子模 M_0, 它包有 $f(M'_0)$ 并且使得 $\sum f(x'_i) \otimes y_i$ 作为 $M_0 \otimes N$ 的元素等于 0, 用 f'_0: $M'_0 \to M_0$ 表 f 在 M'_0 上的限制, 那么$(f_0 \otimes 1)(u_0) = 0$. 因为 M'_0 和 M_0 都是有限生成的, 所以 $f_0 \otimes 1$ 是单的, 因此 $u_0 = 0$, 这就是说 $u = 0$. ■

习题 2.20. 设 $f: A \to B$ 是环同态, 而M是个平坦 A-模, 那么 $M_B = B \otimes_A M$ 是个平坦的 B-模. (利用典范同构(2.14), (2.15).)

代　　数

设 $f: A \to B$ 是环同态. 如 $a \in A$, $b \in B$, 按公式

$$ab = f(a)b$$

来定义一个乘积. 这个定义就把环B 转化成一个 A-模(纯量局限的特例). 这样一来, B 同时有着一个 A-模结构和一个环结构,而这两个结构在某种意义上(读者自己能够叙述出来)是协调的. 环

B，附加上这个 A–模结构之后，就叫做一个 A–**代数**．这样一来，A–代数依定义就是带有一个环同态 $f: A \to B$ 的环 B.

注记．i）如果 A 是域 K（而 $B \neq 0$），那么根据(1.2)，f 是单的，这就是说 K 可以和它在 B 中的象典范地视为同一．因此 K–代数（K 是域）实质上就是包含 K 作为子环的一个环.

ii）设 A 是任一环．因为 A 有单位元，所以存在着唯一的一个从整数环 $\mathbf{Z}$ 到 A 之中的同态 $n \longmapsto n \cdot 1$．所以每个环都自动是一个 $\mathbf{Z}$–代数.

设 $f: A \to B$ 和 $g: A \to C$ 是两个环同态．一个环同态 $h: B \to C$，如果同时还是 A–模同态，就叫作 A–**代数同态**．读者应该验证一下，h 是 A–代数同态，当且仅当 $h \circ f = g$.

环同态 $f: A \to B$ 叫做**有限的**，同时 B 叫做**有限** A–**代数**，如果 B 作为 A–模是有限生成的．同态 f 叫做**有限型**的，同时 B 叫做**有限生成的** A–**代数**，如果 B 中存在着有限个这样的元素 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 B 的每个元素都可以写成 $x_1, \cdots, x_n$ 的系数属于 $f(A)$ 的多项式．等价的条件是：存在着从多项式环 $A[t_1, \cdots, t_n]$ 到 B 上的 A–代数同态.

环 A 叫做**有限生成的**，如果它作为 $\mathbf{Z}$–代数是有限生成的．这就是说，在 A 中存在着有限个这样的元素 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 A 的任一元素都可以写成 $x_1, \cdots, x_n$ 的有理整系数的多项式.

代数的张量积

设 B 和 C 是两个 A–代数，$f: A \to B$ 和 $g: A \to C$ 是相应的同态．因为 B 和 C 是 A–模，可以造它们的张量积 $D = B \otimes_A C$，它仍是一个 A–模．现在在 D 上定义一个乘法.

考察映射 $B \times C \times B \times C \to D$，它由公式

$$(b, c, b', c') \longmapsto bb' \otimes cc'$$

所定义．它对于每个因子都是 A–线性的，因此根据（2.12*），诱导出 A–模同态

$$B \otimes C \otimes B \otimes C \to D,$$

那么，根据(2.14)，又诱导出 A-模同态

$$D \otimes D \to D,$$

而根据(2.11)它对应于一个 A-双线性映射

$$\mu: D \times D \to D,$$

具有性质

$$\mu(b \otimes c, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'.$$

当然，我们可以一开始就用这个公式来定义乘法，但是为了要验证这样定义的合理性，上面进行的那种类型的讨论是必要的.

这样，我们在张量积 $D = B \otimes_A C$ 上引进了乘法. 对于形状如 $b \otimes c$ 的元素，按公式

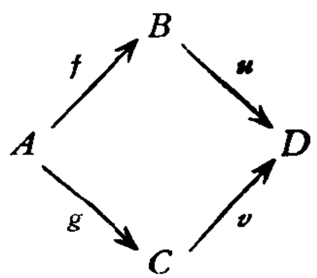
$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$$

来相乘，而在一般情形，按公式

$$\left(\sum_i (b_i \otimes c_i)\right)\left(\sum (b'_j \otimes c'_j)\right) = \sum_{i,j} (b_i b'_j \otimes c_i c'_j)$$

来相乘. 读者应当验证，D 带有这个乘法就成为一个具有单位元素 $1 \otimes 1$ 的交换环. 此外，D 是个 A-代数：映射*) $a \longmapsto f(a) \otimes 1$ 是个环同态 $A \to D$.

实际上存在着环同态的交换图表



在其中，譬如 u 是由公式 $u(b) = b \otimes 1$ 所定义.

习　　题

1. 证明如果 m, n 互素，则 $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$.

---

*) 原书误作 $a \longmapsto f(a) \otimes g(a)$.——译者注

2. 设 A 是一个环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，M 是一个 A–模. 证明模 $A/\mathfrak{a}\otimes_A M$ 与 $M/\mathfrak{a}M$ 同构.

[将正合序列 $0\to\mathfrak{a}\to A\to A/\mathfrak{a}\to 0$ 与 M 作张量积.]

3. 设 A 是个局部环，M 和 N 是有限生成的 A–模. 证明，如果 $M\otimes N=0$，那么 $M=0$ 或者 $N=0$.

[设 $\mathfrak{m}$ 是极大理想，$k=A/\mathfrak{m}$ 是同余类域. 设 $M_k=k\otimes_A M\cong M/\mathfrak{m}M$（根据习题 2).

由 Nakayama 引理，$M_k=0\Longrightarrow M=0$. 但 $M\otimes_A N=0\Longrightarrow(M\otimes_A N)_k=0\Longrightarrow M_k\otimes_k N_k=0\Longrightarrow M_k=0$ 或 $N_k=0$，因为 M_k. N_k 是域上的向量空间.]

4. 设 $M_i\,(i\in I)$ 是任意一组 A–模；M 是它们的直和，证明 M 是平坦的 $\Longleftrightarrow M_i$ 都是平坦的.

5. 设 $A[x]$ 是环 A 上的一个未定元的多项式环，证明 $A[x]$ 是平坦 A–代数. [利用习题 4.]

6. 对任意 A–模 M，用 $M[x]$ 表 x 的系数属于 M 的多项式，即形状如

$$m_0+m_1x+\cdots+m_rx^r\qquad(m_i\in M)$$

的表达式的全体所成的集合. 用显然的方式来定义 $A[x]$ 的元素与 $M[x]$ 的元素的乘积，然后证明 $M[x]$ 成为一个 $A[x]$–模.

证明 $M[x]\cong A[x]\otimes_A M$.

7. 设 $\mathfrak{p}$ 是 A 中的素理想. 证明 $\mathfrak{p}[x]$ 是 $A[x]$ 中的素理想. 如果 $\mathfrak{m}$ 是 A 中的极大理想，$\mathfrak{m}[x]$ 是不是 $A[x]$ 中的极大理想?

8. i) 如果 M 和 N 都是平坦 A–模，那么 $M\otimes_A N$ 也是平坦的.
   ii) 如果 B 是平坦 A–代数，而 N 是平坦 B–模，那么 N 也是平坦 A–模.

9. 设 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ 是 A–模的正合序列. 如果 M' 和 M'' 都是有限生成的，那么 M 也是有限生成的.

10. 设 A 是环，$\mathfrak{a}$ 是包在环 A 的大根中的一个理想，M 是一个 A–模，N 是有限生成的 A–模，u: $M\to N$ 是一个同态. 如果 u

诱导出的同态 $M/\mathfrak{a}M \to N/\mathfrak{a}N$ 是满的，那么 u 也是满的.

11. 设 A 是非 0 环. 证明: $A^m \cong A^n \Longrightarrow m = n$.

[设 $\mathfrak{m}$ 是 A 中的一个极大理想并设 φ: $A^m \to A^n$ 是一个同构. 那么 $1 \otimes \varphi$: $(A/\mathfrak{m}) \otimes A^m \to (A/\mathfrak{m}) \otimes A^n$ 是域 $k = A/\mathfrak{m}$ 上的 m 维和 n 维向量空间之间的同构. 因此 $m = n$.]（参看第三章，习题 15.）

如果 φ: $A^m \to A^n$ 是满同态，那么 $m \geqslant n$.

如果 φ: $A^m \to A^n$ 是单同态，$m \leqslant n$ 是否总成立?

12. 设 M 是有限生成的 A-模而 φ: $M \to A^n$ 是个满同态. 证明 $\ker(\varphi)$ 是有限生成的.

[设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 A^n 的一组基，选这样一些元素 $u_i \in M$ 使得 $\varphi(u_i) = e_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. 证明 M 是 $\ker(\varphi)$ 和 $u_1, \cdots, u_n$ 生成的子模的直和.]

13. 设 f: $A \to B$ 是一个环同态，而 N 是一个 B-模. 利用纯量局限的方法可将 N 看作 A-模，再造 B-模 $N_B = B \otimes_A N$. 证明将 $y \in N$ 映到 $1 \otimes y$ 的同态 g: $N \to N_B$ 是单的而 $g(N)$ 是 N_B 的一个直和项.

[按公式 $p(b \otimes y) = by$ 来定义投影 p: $N_B \to N$ 并证明 $N_B = \operatorname{Im}(g) \oplus \ker(p)$.]

正 向 极 限

14. 一个偏序集 I 叫做**正向集** (directed set) 如果对于每一对 $i, j \in I$，存在 $k \in I$ 使得 $i \leqslant k$ 且 $j \leqslant k$.

设 A 是环，I 是正向集，$(M_i)_{i \in I}$ 是指标集为 I 的一族 A-模. 对 I 中每一对满足 $i \leqslant j$ 的 i, j，设 μ_{ij}: $M_i \to M_j$ 是一 A-同态. 并假定下列公理被满足:

(1) μ_{ii} 是 M_i 中恒同映射，对一切 $i \in I$.

(2) $\mu_{ik} = \mu_{jk} \circ \mu_{ij}$，只要 $i \leqslant j \leqslant k$.

这时就说模 M_i 和同态 μ_{ij} 形成一个正向集 I 上的**正向系统** (direct system) $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$.

我们将构造一个 A-模 M 叫做正向系统 $\mathbf{M}$ 的**正向极限**(direct limit). 设 C 是 M_i 的直和，将每个 M_i 与其在 C 中的典范象视为等同. D 是 C 中由所有形如 $x_i - \mu_{ij}(x_i)$，其中 $i \leqslant j$ 而 $x_i \in M_i$,的元素生成的子模. 设 $M = C/D$, $\mu: C \to M$ 是投影，μ_i 是 μ 在 M_i 上的限制.

模M，或更正确地说是由模M和一个映射族 $\mu_i: M_i \to M$ 所构成的一个对，称为正向系统 $\mathbf{M}$ 的**正向极限**，写作 $\varinjlim M_i$. 由造法显然有 $\mu_i = \mu_j \circ \mu_{ij}$，只要 $i \leqslant j$.

15. 在习题 14 的情况下，证明 $\mathbf{M}$ 的每个元素能写成 $\mu_i(x_i)$ 的形式，对某个 $i \in I$ 及 $x_i \in M_i$.

    再证若 $\mu_i(x_i) = 0$，则存在 $j \geqslant i$ 使得在 M_j 中，$\mu_{ij}(x_i) = 0$.

16. 证明正向极限(除差一同构外)由下述性质所刻划：设N是一 A-模，对每一 $i \in I$，设 $\alpha_i: M_i \to N$ 是 A-模同态，满足 $\alpha_i = \alpha_j \circ \mu_{ij}$，只要 $i \leqslant j$，则存在唯一一个同态 $\alpha: M \to N$使得 $\alpha_i = \alpha \circ \mu_i$，对一切 $i \in I$.

17. 设 $(M_i)_{i \in I}$是一 A-模的子模族，使得对于每一对指数 $i, j \in I$，存在 $k \in I$ 满足 $M_i + M_j \subseteq M_k$. 定义 $i \leqslant j$ 如果 $M_i \subseteq M_j$. 设 $\mu_{ij}: M_i \to M_j$ 是 M_i 到 M_j 中的嵌入映射，证明

$$\varinjlim M_i = \Sigma M_i = \bigcup M_i.$$

    特别，任一个 A-模是它的有限生成子模的正向极限.

18. 设 $\mathbf{M} = (M_i, \mu_{ij})$，$\mathbf{N} = (N_i, \nu_{ij})$ 是同一正向集上的 A-模的正向系统. 设 M, N 是正向极限而 $\mu_i: M_i \to M$, $\nu_i: N_i \to N$是相伴的同态.

    同态 $\boldsymbol{\Phi}: \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ 由一族 A-模同态 ϕ_i 所定义，$\phi_i: M_i \to N_i$ 使得对 $i \leqslant j$ 有 $\phi_j \circ \mu_{ij} = \nu_{ij} \circ \phi_i$. 证明 $\boldsymbol{\Phi}$ 定义唯一一个同态 $\phi = \varinjlim \phi_i: M \to N$ 使得 $\phi \circ \mu_i = \nu_i \circ \phi_i$ 对一切 $i \in I$.

19. 一个正向系统和同态的序列

$$\mathbf{M} \to \mathbf{N} \to \mathbf{P}$$

称为正合的，如果对于每个 $i \in I$ 相应的模与模同态的序列是正合的。证明这时正向极限序列 $M \to N \to P$ 是正合的。[利用习题 15。]

张量积与正向极限可交换

20. 保持与习题 14 同样的记号，设 N 是任一 A-模，则 $(M_i \otimes N, \mu_{ij} \otimes 1)$ 是一正向系统，设 $P = \varinjlim (M_i \otimes N)$ 是它的正向极限。对每个 $i \in I$ 我们有同态 $\mu_i \otimes 1$: $M_i \times N \to M \otimes N$，因此由习题 16 有同态 ψ: $P \to M \otimes N$。证明 ψ 是一同构，使得

$$\varinjlim (M_i \otimes N) \cong (\varinjlim M_i) \otimes N.$$

[对于每个 $i \in I$，设 g_i: $M_i \times N \to M_i \otimes N$ 是典范双线性映射。过渡到取极限我们得到一映射 $g: M \times N \to P$。证明 g 是 A-双线性的，因此定义一个同态 ϕ: $M \otimes N \to P$，证明 $\phi \circ \psi$ 和 $\psi \circ \phi$ 都是恒等映射。]

21. 设 $\{A_i\}_{i \in I}$ 是由正向集 I 所标号的一族环，对于 I 中每一对 $i \leqslant j$。设 α_{ij}: $A_i \to A_j$ 是满足习题 14 中条件 (1) 与 (2) 的同态，将每个 A_i 看作一个 $\mathbf{Z}$-模，我们可以作出正向极限 $A = \varinjlim A_i$。证明 A 从 A_i 继承了一个环结构，使得映射 $A_i \to A$ 是环同态。环 A 是系统 (A_i, α_{ij}) 的**正向极限**。

如果 $A = 0$，证明对某个 $i \in I$ $A_i = 0$。[记住所有环都有单位元素！]

22. 设 (A_i, α_{ij}) 是环的正向系统，$\mathfrak{N}_i$ 是 A_i 的小根。证明 $\varinjlim \mathfrak{N}_i$ 是 $\varinjlim A_i$ 的小根。

若每个 A_i 是整环，则 $\varinjlim A_i$ 是整环。

23. 设 $(B_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是一族 A-代数，对 Λ 的每个有限子集 J，设 B_J 记 B_λ，$\lambda \in J$ (在 A 上) 的张量积。设 J' 是 Λ 的另一有限子集且 $J \subseteq J'$，则有典范 A-代数同态 $B_J \to B_{J'}$。令 B 表示当 J 跑

过Λ一切有限子集时环B_J的正向极限. 环B有自然A-代数结构，使得同态$B_J \to B$是A-代数同态. A-代数B叫做族$(B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$的张量积.

平坦性和函子 Tor

在这些习题中假定读者熟悉 Tor 这个函子的定义和基本性质.

24. 若M是一A-模，下列陈述等价:

i) M是平坦的;

ii) $\operatorname{Tor}_n^A(M, N)=0$ 对一切 $n>0$ 及一切A-模N;

iii) $\operatorname{Tor}_1^A(M, N)=0$ 对一切A-模N.

[为了证 i)$\Longrightarrow$ii)，取N的一个自由完全表现并将它与M作张量积. 因M平坦,所得序列是正合的,因此它的同调群，即 $\operatorname{Tor}_n^A(M, N)$ 是零,对一切 $n>0$. 为了证 iii)$\Longrightarrow$i)，设 $0\to N'\to N\to N''\to 0$ 是正合序列，则从 Tor 正合序列推出

$$\operatorname{Tor}_1(M, N'')\to M\otimes N'\to M\otimes N\to M\otimes N''\to 0$$

正合. 因此 $\operatorname{Tor}_1(M, N'')=0$ 从而M是平坦模.]

25. 设 $0\to N'\to N\to N''\to 0$ 正合，N''平坦，则N'平坦$\Longleftrightarrow N$平坦. [利用习题 24 及 Tor 正合序列.]

26. 设N是一A-模，则N平坦$\Longleftrightarrow \operatorname{Tor}_1(A/\mathfrak{a}, N)=0$ 对A的所有有限生成理想$\mathfrak{a}$.

[首先用(2.19)证明，如果对一切有限生成A-模M，有$\operatorname{Tor}_1(M, N)=0$，则$N$是平坦的. 设$M$有限生成，$x_1,\cdots,x_n$是它的一组生成元，$M_i$是由$x_1,\cdots,x_i$生成的子模. 通过考虑一系列商模$M_i/M_{i-1}$，利用习题 25 可以推出,如果对一切循环$A$-模$M$，即一切由单个元素生成的$A$-模$M$，也即形状为$A/\mathfrak{a}$($\mathfrak{a}$是某个$A$的理想)的$A$-模$M$,有$\operatorname{Tor}_1(M, N)=0$，则$N$是平坦的. 最后,再利用(2.19)化为$\mathfrak{a}$是有限生成理想的情形.]

27. 一个环A是**绝对平坦** (absolutely flat) 的,如果每个A-模都是

平坦的．证明下列陈述等价：

i) A 是绝对平坦的．

ii) 每个主理想是幂等的．

iii) 每个有限生成的理想是 A 的直和分量．

[i) $\Longrightarrow$ ii)．设 $x \in A$，则 $A/(x)$ 是一平坦 A-模．因此在图表

$$\begin{array}{ccc} (x)\otimes A & \xrightarrow{\beta} & (x)\otimes A/(x) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ A & \longrightarrow & A/(x) \end{array}$$

中，α 是单的，故 $\mathrm{Im}\,(\beta)=0$，所以 $(x)=(x^2)$． ii) $\Longrightarrow$ iii)．设 $x \in A$，则有某个 $a \in A$ 使 $x = ax^2$，因此 $e = ax$ 是幂等元且有 $(e)=(x)$． 如果 e, f 是幂等元，则 $(e, f) = (e+f-ef)$．因此，每个有限生成的理想是主理想． 且由一个幂等元 e 生成，因为 $A=(e)\oplus(1-e)$，故 (e) 是 A 的一个直和分量． iii) $\Longrightarrow$ i)．使用习题 26 的判别准则．]

28. 布尔环是绝对平坦的．第一章习题 7 中的环是绝对平坦的．绝对平坦环的每个同态象都是绝对平坦的． 若一局部环是绝对平坦的，则它是一个域．

若 A 是绝对平坦的，A 中每个非可逆元是零因子．

第三章　分式环和分式模

分式环的造法以及与它相关联的局部化方法大概是交换代数中最重要的技术性工具．它们相当于在代数几何图形里把注意力集中到一个开子集上或一点的近傍；这些概念的重要性是显然的．这一章给出了分式环的定义和简单性质．

从整数环 $\mathbf{Z}$ 出发造有理数域 $\mathbf{Q}$（并将 $\mathbf{Z}$ 嵌入 $\mathbf{Q}$）的方法毫无困难地可以推广到任意整环 A 上去从而得到 A 的**分式域**．这个造法在于选取形如 (a, s) 的一切有序对的集合，其中 $a, s \in A$ 而 $s \neq 0$ 并在这个集合中引进等价关系：

$$(a, s) \equiv (b, t) \Longleftrightarrow at - bs = 0.$$

因为在验证这个关系的传递性时，要用消去律，这就是说要利用 A 中不存在非 0 零因子这一事实，所以这个造法仅当 A 是整环才行得通．然而这个方法可以被推广如下．

设 A 是任意环． A 的**乘法封闭子集**指的是这样的一个子集 $S \subset A$，它包含 1 而且它对于乘法是封闭的．换句话说，S 是 A 的乘法半群的子半群．在 $A \times S$ 上按以下方式定义一个等价关系：

$$(a, s) \equiv (b, t) \Longleftrightarrow (at - bs) u = 0 \qquad \text{对某个 } u \in S.$$

显然，这个关系是自反的，对称的，为了验证传递性，假设 $(a, s) \equiv (b, t)$ 和 $(b, t) \equiv (c, u)$． 那么在 S 中存在着元素 v, w 使得 $(at - bs) v = 0$，$(bu - ct) w = 0$． 从这两个方程中消去 b，得到 $(au - cs) tvw = 0$． 因为 S 是乘法封闭的，所以 $tvw \in S$，因此 $(a, s) \equiv (c, u)$．这样我们就有了一个等价关系．将 (a, s) 所属的等价类记作 a/s， 并设 $S^{-1}A$ 是所有等价类所组成的集合．在"分数" a/s 上按初等代数的公式

$$(a/s) + (b/t) = (at + bs)/st$$

$$(a/s)(b/t) = ab/st$$

定义加法和乘法，就在 $S^{-1}A$ 上引进了一个环结构.

习题. 验证上述加法和乘法的定义不依赖于代表元 (a/s) 和 (b/t) 的选取，而且 $S^{-1}A$ 适合具有单位元的交换环的公理.

我们还有环同态 $f\colon A\to S^{-1}A$，它由 $f(x)=x/1$ 所定义. 一般说来，它不是单的.

注记. 如果 A 是整环而 $S=A\setminus\{0\}$，那么 $S^{-1}A$ 就是 A 的分式域.

环 $S^{-1}A$ 叫做 A 对于 S 的**分式环**. 它具有泛性质：

命题 3.1. 设 $g\colon A\to B$ 是个环同态使得对于一切 $s\in S$，$g(s)$ 都是 B 中可逆元. 那么存在着唯一的一个环同态 $h\colon S^{-1}A\to B$，使得 $g=h\circ f$.

证明. i) **唯一性.** 如果 h 满足条件，那么 $h(a/1)=hf(a)=g(a)$ 对一切 $a\in A$. 因此，如果 $s\in S$，则

$$h(1/s)=h((s/1)^{-1})=h(s/1)^{-1}=g(s)^{-1},$$

由此推出 $h(a/s)=h(a/1)h(1/s)=g(a)g(s)^{-1}$，所以 h 由 g 唯一地确定.

ii) **存在性.** 令 $h(a/s)=g(a)g(s)^{-1}$. 只要 h 的这个定义是合理的，那么显然 h 是环同态. 假设 $a/s=a'/s'$；那么存在着一个元素 $t\in S$，它具有性质 $(as'-a's)t=0$；因此

$$(g(a)g(s')-g(a')g(s))g(t)=0;$$

但是 $g(t)$ 是 B 中可逆元，所以 $g(a)g(s)^{-1}=g(a')g(s')^{-1}$. ∎

环 $S^{-1}A$ 和同态 $f\colon A\to S^{-1}A$ 具有以下性质：

1) $s\in S\Longrightarrow f(s)$ 是 $S^{-1}A$ 中可逆元；

2) $f(a)=0\Longrightarrow as=0$ 对某个 $s\in S$；

3) $S^{-1}A$ 中任一元素均有形状 $f(a)f(s)^{-1}$，其中 $a\in A$ 而 $s\in S$.

反过来，这三条性质在同构意义下唯一地确定了环 $S^{-1}A$. 确切地说，有

系理 3.2. 设 $g\colon A\to B$ 是一个环同态，具有性质

i) $s\in S\Longrightarrow g(s)$ 是 B 中可逆元；

ii) $g(a)=0 \Longrightarrow as=0$ 对某个 $s\in S$;

iii) B 中任一元素均有形状 $g(a)g(s)^{-1}$;

那么存在着唯一的一个同构 $h: S^{-1}A\to B$ 使得 $g=h\circ f$.

证明. 根据(3.1)我们应该证明由公式

$$h(a/s)=g(a)g(s)^{-1}$$

定义的同态 $h: S^{-1}A\to B$ 是个同构(这个定义用到了 i)). 根据 iii), h 是满的. 为了证明 h 是单的, 我们考察它的核: 如果 $h(a/s)=0$, 那么 $g(a)=0$, 于是根据 ii), 我们有 $at=0$ 对某个 $t\in s$, 因此 $(a,s)\equiv(0,1)$, 即在 $S^{-1}A$ 中 $a/s=0$. ■

例. 1) 设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想. 那么它的补集 $S=A\backslash\mathfrak{p}$ 是乘法封闭的(事实上 $A\backslash\mathfrak{p}$ 是乘法封闭的 $\Longleftrightarrow \mathfrak{p}$ 是素理想). 这时将 $S^{-1}A$ 写作 $A_{\mathfrak{p}}$. 形如 a/s 的元素,这里 $a\in\mathfrak{p}$, 组成 $A_{\mathfrak{p}}$ 中一个理想 $\mathfrak{m}$. 如果 $b/t\notin\mathfrak{m}$, 那么 $b\notin\mathfrak{p}$, 因此 $b\in S$, 于是 b/t 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 中可逆元. 由此推出,如 $\mathfrak{a}$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 中的理想而 $\mathfrak{a}\not\subseteq\mathfrak{m}$, 那么 $\mathfrak{a}$ 就含一个可逆元,因而是整个环. 因此, $\mathfrak{m}$ 是环 $A_{\mathfrak{p}}$ 中仅有的极大理想; 换句话说, $A_{\mathfrak{p}}$ 是**局部环**.

从 A 转化到 $A_{\mathfrak{p}}$ 的过程叫做在 $\mathfrak{p}$ 的**局部化**.

2) $S^{-1}A$ 是零环 $\Longleftrightarrow 0\in S$.

3) 设 $f\in A$ 而 $S=\{f^n\}_{n>0}$. 这时将 $S^{-1}A$ 写作 A_f.

4) 设 $\mathfrak{a}$ 是 A 中任一理想, 并且令 $S=1+\mathfrak{a}$ 是一切 $1+x$, $x\in\mathfrak{a}$, 所成的集. 显然 S 是乘法封闭的.

5) 例 1) 和例 3) 的特殊情形:

i) $A=\mathbf{Z}$, $\mathfrak{p}=(p)$, p 是素数; $A_{\mathfrak{p}}=$ 所有 m/n 形状的有理数的集合,这里 n 与 p 互素. 如果 $f\in\mathbf{Z}$, $f\neq 0$, 那么 A_f 是所有以 f 的幂为分母的有理数的集合.

ii) $A=k[t_1,\cdots,t_n]$, 这里 k 是域而 t_i 是无关未定元, $\mathfrak{p}$ 是 A 中素理想. 这时 $A_{\mathfrak{p}}$ 是所有 f/g 形状的有理函数的集合, 这里 $g\notin\mathfrak{p}$. 设 V 是由理想 $\mathfrak{p}$ 定义的簇,即所有点 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in k^n$ 使得 $f(x)=0$ 对一切 $f\in\mathfrak{p}$ 的集合. 这时(只要 k 是无限域) $A_{\mathfrak{p}}$ 可以和 k^n 上那些几乎在 V 的所有点上都有定义的有理函数组成

的环相重合．它叫 k^n **沿簇** V 的局部环．它是代数几何中出现的局部环的原型．

$S^{-1}A$ 的造法可以搬到 A-模 M 上来，如果用 M 来代替环 A．在 $M \times S$ 上如下地定义关系 $\equiv$：

$$(m, s) \equiv (m', s') \Longleftrightarrow \exists t \in S \text{ 使 } t(sm' - s'm) = 0.$$

像上面一样，这是个等价关系．设 m/s 是 (m, s) 这个对所属的等价类，并设 $S^{-1}M$ 为这些分式的集合．在 $S^{-1}M$ 上按显然的公式引进加法和乘以标量的乘法使它成为 $S^{-1}A$ 模．像上面例 1 和例 3 中一样，如果 $S = A \backslash \mathfrak{p}$（$\mathfrak{p}$ 为素理想），就将 $S^{-1}M$ 记作 $M_{\mathfrak{p}}$；如果 $S = \{f^n\}_{n \geqslant 0}$，样将 $S^{-1}M$ 记作 M_f．

设 u：$M \to N$ 是一个 A-模同态．它诱导出 $S^{-1}A$-模同态 $S^{-1}u$：$S^{-1}M \to S^{-1}N$，这就是说 $S^{-1}u$ 将 m/s 映到 $u(m)/s$．我们有 $S^{-1}(v \circ u) = (S^{-1}v) \circ (S^{-1}u)$．

命题 3.3. 运算 S^{-1} 是正合的，即如果序列 $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ 在 M 正合，那么序列 $S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ 在 $S^{-1}M$ 正合．

证明．我们有 $g \circ f = 0$，因此 $S^{-1}g \circ S^{-1}f = S^{-1}(0) = 0$，于是 $\operatorname{Im}(S^{-1}f) \subseteq \operatorname{Ker}(S^{-1}g)$．为了证明反包含关系，令 $m/s \in \operatorname{Ker}(S^{-1}g)$，那么在 $S^{-1}M''$ 中 $g(m)/s = 0$，故存在 $t \in S$ 使得在 M'' 中 $tg(m) = 0$．因为 g 是 A-模同态，所以 $tg(m) = g(tm)$，因此 $tm \in \operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im}(f)$，于是 $tm = f(m')$，对某个 $m' \in M'$．那么在 $S^{-1}M$ 中有 $m/s = f(m')/st = (S^{-1}f)(m'/st) \in \operatorname{Im}(S^{-1}f)$，因此 $\operatorname{Ker}(S^{-1}g) \subseteq \operatorname{Im}(S^{-1}f)$．■

特别，由(3.3)推出，若 M' 是 M 的一个子模，映射 $S^{-1}M' \to S^{-1}M$ 是单的，因此 $S^{-1}M'$ 可以看作 $S^{-1}M$ 的子模．基于这个约定，有

推论 3.4. 转化到分式模的过程与作有限和、有限交的运算以及作同余类模的过程都可交换．确切地说，如果 N，P 是 A-模 M 的子模，那么

i) $S^{-1}(N + P) = S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$，

ii) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P)$，

iii) $S^{-1}A$- 模 $S^{-1}(M/N)$ 与 $S^{-1}M/S^{-1}N$ 同构．

证明. i) 由定义立即推出，而 ii) 不难验证：如果 $y/s = z/t$ $(y \in N,\ z \in P,\ s,\ t \in S)$，则 $u(ty - sz) = 0$ 对某个 $u \in S$，于是 $w = uty = usz \in N \cap P$，而这就是说 $y/s = w/stu \in S^{-1}(N \cap P)$. 因此 $S^{-1}N \cap S^{-1}P \subseteq S^{-1}(N \cap P)$；反包含关系是显然的. 将 S^{-1} 作用到正合序列 $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ 上就得到 iii). ■

命题 3.5. 设 M 是个 A-模. 那么 $S^{-1}A$-模 $S^{-1}M$ 与 $S^{-1}A \otimes_A M$ 同构. 确切地说，存在着唯一同构

$$f:\ S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M,$$

使得

$$f((a/s) \otimes m) = am/s \text{ 对一切 } a \in A,\ m \in M,\ s \in S. \quad (1)$$

证明. 按公式

$$(a/s,\ m) \longmapsto am/s$$

定义的映射 $S^{-1}A \times M \to S^{-1}M$ 是 A-双线性的，因此根据张量积的泛性质(2.12)，它导出一个 A-同态

$$f:\ S^{-1}A \otimes_A M \to S^{-1}M,$$

而 f 适合条件(1). 显然 f 是满的，而且由(1)式唯一确定.

设 $\sum_i (a_i/s_i) \otimes m_i$ 是 $S^{-1}A \otimes M$ 中任一元. 如果 $s = \prod_i s_i \in S$，$t_i = \prod_{j \neq i} s_j$，那么

$$\sum_i a_i/s_i \otimes m_i = \sum_i a_i t_i/s \otimes m = \sum_i \frac{1}{s} \otimes a_i t_i m = \frac{1}{s} \otimes \sum_i a_i t_i m,$$

因此 $S^{-1}A \otimes M$ 中每个元素均有形状 $(1/s) \otimes m$. 假定 $f((1/s) \otimes m) = 0$，那么 $m/s = 0$，因此 $tm = 0$ 对某个 $t \in S$，因而

$$\frac{1}{s} \otimes m = \frac{t}{st} \otimes m = \frac{1}{st} \otimes tm = \frac{1}{st} \otimes 0 = 0.$$

所以 f 是单的，于是 f 是同构. ■

系理 3.6. $S^{-1}A$ 是平坦 A-模.

证明. 这从(3.3)，(3.5)推出. ■

命题 3.7. 对任意 A-模 M 和 N，存在着唯一的 $S^{-1}A$-模同构

$$f: S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}N \to S^{-1}(M \otimes_A N),$$

使得

$$f((m/s) \otimes (n/t)) = (m \otimes n)/st.$$

特别,如果 $\mathfrak{p}$ 是任一素理想,那么作为 $A_\mathfrak{p}$-模:

$$M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \cong (M \otimes_A N)_\mathfrak{p}.$$

证明. 利用(3.5)和第二章的自然同构. ■

局 部 性 质

环 A (或 A-模 M) 的性质 P 叫做**局部性质**, 如果以下断言成立:

A(或 M)具有性质 $P \Longleftrightarrow$ 对环 A 的每一素理想 $\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$(或 $M_\mathfrak{p}$)也具有性质 P.

下面的命题给出了局部性质的例子.

命题 3.8. 设 M 是个 A-模,那么以下诸断言等价

i) $M = 0$;

ii) 对环 A 的一切素理想 $\mathfrak{p}$, $M_\mathfrak{p} = 0$;

iii) 对环 A 的一切极大理想 $\mathfrak{m}$, $M_\mathfrak{m} = 0$.

证明. 显然 i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii). 假定 iii) 成立, 但 $M \neq 0$. 设 x 是 M 中任一非 0 元,并设 $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(x)$; $\mathfrak{a}$ 是一个 $\neq (1)$ 的理想,根据(1.4)它就包含在某个极大理想 $\mathfrak{m}$ 中. 考察元素 $x/1 \in M_\mathfrak{m}$. 因为 $M_\mathfrak{m} = 0$, 所以 $x/1 = 0$, 因此 x 被 $A - \mathfrak{m}$ 中某个元素所零化. 但这是不可能的,因为 $\mathrm{Ann}(x) \subseteq \mathfrak{m}$. ■

命题 3.9. 设 $\phi: M \to N$ 是个 A-模同态. 那么以下诸断言等价:

i) ϕ 是单的;

ii) 对每一素理想 $\mathfrak{p}$, $\phi_\mathfrak{p}: M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ 是单的;

iii) 对每一极大理想 $\mathfrak{m}$, $\phi_\mathfrak{m}: M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ 是单的.

如果在上述断言中用"满"来代替"单",那么它们仍是等价的.

证明. i) $\Longrightarrow$ ii). 序列 $0 \to M \to N$ 正合, 因此 $0 \to M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$

正合，所以 $\phi_\mathfrak{p}$ 是单的.

ii)$\Longrightarrow$iii)，这是因为每个极大理想都是素理想.

iii)$\Longrightarrow$i). 令 $M'=\mathrm{Ker}(\phi)$. 那么序列 $0\to M'\to M\to N$ 正合，因此根据(3.3)序列 $0\to M'_\mathfrak{m}\to M_\mathfrak{m}\to N_\mathfrak{m}$ 也正合. 因 $\phi_\mathfrak{m}$ 是单的，所以 $M'_\mathfrak{m}\cong\mathrm{Ker}(\phi_\mathfrak{m})=0$. 那么由(3.8)推出 $M'=0$，因此 ϕ 是单的.

为了证明命题另一部分，只要将所有箭头倒过来即可. ■

模的平坦性也是个局部性质：

命题 3.10. 对任意 A–模 M，以下诸命题等价：

i) M 是平坦 A–模；

ii) 对每一素理想 $\mathfrak{p}$，$M_\mathfrak{p}$ 是平坦 $A_\mathfrak{p}$–模；

iii) 对每一极大理想 $\mathfrak{m}$，$M_\mathfrak{m}$ 是平坦 $A_\mathfrak{m}$–模.

证明. i)$\Longrightarrow$ii) 由(3.5)和(2.20)推出.

ii)$\Longrightarrow$iii) 显然是对的.

iii)$\Longrightarrow$i). 如果 $N\to P$ 是 A–模同态，$\mathfrak{m}$ 是 A 中任一极大理想. 那么

$N\to P$ 是单映射 $\Longrightarrow N_\mathfrak{m}\to P_\mathfrak{m}$ 是单映射	根据(3.9)
$\Longrightarrow N_\mathfrak{m}\otimes_{A_\mathfrak{m}}M_\mathfrak{m}\to P_\mathfrak{m}\otimes_{A_\mathfrak{m}}M_\mathfrak{m}$ 是单映射	根据(2.19)
$\Longrightarrow(N\otimes_A M)_\mathfrak{m}\to(P\otimes_A M)_\mathfrak{m}$ 是单映射	根据(3.7)
$\Longrightarrow N\otimes_A M\to P\otimes_A M$ 是单映射	根据(3.9).

因此，根据(2.19)，M 是平坦模. ■

理想在分式环中的扩张和局限

设 A 是个环，S 是 A 中的一个乘法封闭子集，$f: A\to S^{-1}A$ 是按公式 $f(a)=a/1$ 定义的自然同态. 用 C 表 A 中局限理想的集合，用 E 表 $S^{-1}A$ 中扩理想的集合(参看(1.17)). 对于任一理想 $\mathfrak{a}\subset A$，它在 $S^{-1}A$ 中的扩理想 $\mathfrak{a}^e$ 是 $S^{-1}\mathfrak{a}$ (因为每个元素 $y\in\mathfrak{a}^e$ 都有形状 $\Sigma a_i/s_i$，这里 $a_i\in\mathfrak{a}$，$s_i\in S$；再将这个和通一下分).

命题 3.11. i) $S^{-1}A$ 中每个理想都是扩理想.

ii) 如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 中理想. 那么 $\mathfrak{a}^{ec}=\bigcup_{s\in S}(\mathfrak{a}:s)$. 因此 $\mathfrak{a}^{e}=(1)$ $\Longleftrightarrow$ 交 $\mathfrak{a}\cap S$ 非空.

iii) $\mathfrak{a}\in C\Longleftrightarrow S$ 中没有一个元素是 $A/\mathfrak{a}$ 中的零因子.

iv) $S^{-1}A$ 中的素理想在对应 $(\mathfrak{p}\longleftrightarrow S^{-1}\mathfrak{p})$ 之下与 A 中那些与 S 不相交的素理想一一对应.

v) 运算 S^{-1} 与作有限和、积、交以及求根的运算可交换.

证明. i) 设 $\mathfrak{b}$ 是 $S^{-1}A$ 中的一个理想, 而 $x/s\in\mathfrak{b}$. 那么 $x/1\in\mathfrak{b}$, 因此 $x\in\mathfrak{b}^{c}$, 于是 $x/s\in\mathfrak{b}^{ce}$. 因为 $\mathfrak{b}\supseteq\mathfrak{b}^{ce}$ 总成立 (见 (1.17)), 由此推出 $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}^{ce}$.

ii) $x\in\mathfrak{a}^{ec}=(S^{-1}\mathfrak{a})^{c}\Longleftrightarrow x/1=a/s$ 对某个 $a\in\mathfrak{a}$, $s\in S\Longleftrightarrow$ $(xs-a)t=0$ 对某个 $t\in S\Longleftrightarrow xst\in\mathfrak{a}\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{s\in S}(\mathfrak{a}:s)$.

iii) $\mathfrak{a}\in C\Longleftrightarrow\mathfrak{a}^{ec}\subseteq\mathfrak{a}\Longleftrightarrow(sx\in\mathfrak{a}$ 对某个 $s\in S\Longrightarrow x\in\mathfrak{a})\Longleftrightarrow S$ 中没有元素是 $A/\mathfrak{a}$ 中的零因子.

iv) 如果 $\mathfrak{q}$ 是 $S^{-1}A$ 中的素理想, 那么 $\mathfrak{q}^{c}$ 是 A 中的素理想(这对任意环同态都成立). 反过来, 如果 $\mathfrak{p}$ 是 A 中素理想, 那么 $A/\mathfrak{p}$ 是整环. 将 S 在 $A/\mathfrak{p}$ 中的像记作 $\bar{S}$, 我们得到 $S^{-1}A/S^{-1}\mathfrak{p}\cong\bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{p})$. 后面这个环或者是零环, 或者包含在环 $A/\mathfrak{p}$ 的分式域中, 因而是整环. 因此, 理想 $S^{-1}\mathfrak{p}$ 或者是素的, 或者与理想(1)相重合. 由 i) 推出, 后一可能性出现, 当且仅当 $\mathfrak{p}$ 与 S 的交非空.

v) 关于和与积的断言从(1.18)推出; 关于交的断言从(3.4)推出. 至于求根, 从(1.18)推出 $S^{-1}r(\mathfrak{a})\subseteq r(S^{-1}\mathfrak{a})$. 反包含关系的证明是按步就班的验证, 我们把它留给读者. ■

注记. 1) 设 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是 A 中理想. 如果 $\mathfrak{b}$ 是有限生成的, 那么公式

$$S^{-1}(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})=(S^{-1}\mathfrak{a}:S^{-1}\mathfrak{b})$$

成立; 参看(3.15).

2) 在(1.8)中证明了, 每个非幂 0 元 $f\in A$ 都必不包含在某个素理想之中. 采用分式环的语言, 这个证明可以做得更为简洁. 因

为集合 $S=(f^n)_{n\geq 0}$ 不包含 0，所以环 $S^{-1}A=A_f$ 不是零环. 根据(1.3)，它有一个极大理想，而这个极大理想在 A 中的局限理想是素理想 $\mathfrak{p}$，根据(3.11)，$\mathfrak{p}$ 不与 S 相交，因此 $f\notin\mathfrak{p}$.

系理 3.12. 如果 $\mathfrak{N}$ 是 A 的小根. 那么 $S^{-1}\mathfrak{N}$ 是 $S^{-1}A$ 的小根. ■

系理 3.13. 如果 $\mathfrak{p}$ 是环 A 的一个素理想，那么局部环 $A_\mathfrak{p}$ 中的素理想与 A 中包含在 $\mathfrak{p}$ 中的素理想一一对应.

证明. 在(3.11)，iv) 中，令 $S=A\backslash\mathfrak{p}$. ■

注记. 从 A 到 $A_\mathfrak{p}$ 的过程“消灭”了除开包含在 $\mathfrak{p}$ 中的那些素理想之外的一切素理想. 另一方面，从 A 转移 $A/\mathfrak{p}$ 的过程“消灭”了除开包含 $\mathfrak{p}$ 的那些素理想之外的一切素理想. 现在设 $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{q}$ 是一对素理想. 那么对 $\mathfrak{p}$ 局部化再对 $\mathfrak{q}$ 取同余类环(按任一次序：根据(3.4)，这两个运算是可交换的)，我们能够把注意力只集中到 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$ 之间的素理想上来. 特别，如果 $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$，我们就得到一个域，它叫作在理想 $\mathfrak{p}$ 处的同余类域. 它可以作为整环 $A/\mathfrak{p}$ 的分式域或作为局部环 $A_\mathfrak{p}$ 的剩余类域而得到.

命题 3.14. 设 M 是个有限生成的 A-模，S 是 A 中的乘法封闭子集. 那么 $S^{-1}(\mathrm{Ann}(M))=\mathrm{Ann}(S^{-1}M)$.

证明. 如果这个命题对两个 A-模 M 和 N 成立，那么它对 $M+N$ 也成立：

$$
\begin{aligned}
S^{-1}(\mathrm{Ann}(M+N)) &= S^{-1}(\mathrm{Ann}(M)\cap\mathrm{Ann}(N)) && \text{根据(2.2)}\\
&= S^{-1}(\mathrm{Ann}(M))\cap S^{-1}(\mathrm{Ann}(N)) && \text{根据(3.4)}\\
&= \mathrm{Ann}(S^{-1}M)\cap\mathrm{Ann}(S^{-1}N) && \text{根据假设}\\
&= \mathrm{Ann}(S^{-1}M+S^{-1}N)=\mathrm{Ann}(S^{-1}(M+N)).
\end{aligned}
$$

因此只要对于由一个元素生成的模 M 来证明(3.14)就够了. 这时 $M\cong A/\mathfrak{a}$ (作为 A-模)，这里 $\mathfrak{a}=\mathrm{Ann}(M)$. 根据(3.4)，$S^{-1}M\cong S^{-1}(A)/S^{-1}(\mathfrak{a})$，因此 $\mathrm{Ann}(S^{-1}M)=S^{-1}\mathfrak{a}=S^{-1}(\mathrm{Ann}(M))$. ■

系理 3.15. 设 N 和 P 是 A-模 M 的子模，并设 P 是有限生成的. 那么 $S^{-1}(N:P)=(S^{-1}N:S^{-1}P)$.

证明． 根据（2.2），$N: P = \mathrm{Ann}((N+P)/N)$；再应用（3.14）． ■

命题 3.16. 设 $A \to B$ 是环同态，$\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想．那么 $\mathfrak{p}$ 是 B 中一个素理想的局限理想当且仅当 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.

证明． 如果 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$，那么根据(1.17)，$\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$．反过来，设 $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$，并设 S 是 $A \backslash \mathfrak{p}$ 在 B 中的像．那么 $\mathfrak{p}^e$ 与 S 不相交，因此根据（3.11），$\mathfrak{p}^e$ 在 $S^{-1}B$ 中的扩理想是个真理想．因此它包含在环 $S^{-1}B$ 的某个极大理想 $\mathfrak{m}$ 之中．将 $\mathfrak{m}$ 在 B 中的局限理想记作 $\mathfrak{q}$，那么 $\mathfrak{q}$ 是个素理想，$\mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{p}^e$，$\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$．因此 $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$. ■

习 题

1. 设 S 是环 A 的乘法封闭子集，M 是有限生成 A-模．证明，$S^{-1}M = 0$ 当且仅当存在 $s \in S$ 使得 $sM = 0$.
2. 设 $\mathfrak{a}$ 是环 A 中的理想，$S = 1 + \mathfrak{a}$．证明 $S^{-1}\mathfrak{a}$ 含于 $S^{-1}A$ 的大根中．

   利用这个结果和 Nakayama 引理给出（2.5）的一个不依赖于行列式的证明．[如果 $M = \mathfrak{a}M$，那么 $S^{-1}M = (S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}M)$，依 Nakayama 引理，可得 $S^{-1}M = 0$．再利用习题 1.]
3. 设 A 是环，S 和 T 是 A 的两个乘法封闭子集，又设 U 是 T 在 $S^{-1}A$ 中的像．证明环 $(ST)^{-1}A$ 与 $U^{-1}(S^{-1}A)$ 同构．
4. 设 $f: A \to B$ 是环同态，S 是 A 的一个乘法封闭子集．设 $T = f(S)$．求证，$S^{-1}B$ 与 $T^{-1}B$ 作为 $S^{-1}A$-模同构．
5. 设 A 是环．又设对每个素理想 $\mathfrak{p}$，局部环 $A_\mathfrak{p}$ 没有非零幂零元．证明 A 也没有非零幂零元．如果每个 $A_\mathfrak{p}$ 是整环，问 A 是否一定是整环？
6. 设 A 是非零环，Σ 是 A 的一切不含 0 的乘法封闭子集 S 的集合．证明，Σ 中有极大元，而 $S \in \Sigma$ 是极大的当且仅当 $A \backslash S$ 是 A 的极小素理想．

7. 环 A 的乘法封闭子集 S 称作**饱和的** (saturated)，如果

$$xy \in S \Longleftrightarrow x \in S \text{ 和 } y \in S.$$

证明

i) S 是饱和的 $\Longleftrightarrow A \backslash S$ 是素理想的并.

ii) 如果 S 是 A 的任一乘法封闭子集，那么存在唯一的含有 S 的最小的饱和的乘法封闭子集 $\bar{S}$，且 $\bar{S}$ 是与 S 不相交的素理想的并在 A 中的补集. ($\bar{S}$ 叫作 S 的饱和化 (saturation).)

如果 $S = 1 + \mathfrak{a}$，这里 $\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，求 $\bar{S}$.

8. 设 S, T 是 A 的乘法封闭子集，使得 $S \subseteq T$. 设 $\phi: S^{-1}A \to T^{-1}A$ 是同态，它将 $a/s \in S^{-1}A$ 映到 $a/s \in T^{-1}A$. 说明下述论断等价:

i) ϕ 是一一的.

ii) 对每个 $t \in T$，$t/1$ 是 $S^{-1}A$ 中的可逆元.

iii) 对每个 $t \in T$，存在 $x \in A$，使得 $xt \in S$.

iv) T 含于 S 的饱和化(习题 7)中.

v) 与 T 相交的每个素理想也与 S 相交.

9. A 中一切非零因子的集合 S_0 是 A 中饱和的乘法封闭子集. 因此 A 中零因子的集合 D 是素理想的并(见第一章，习题14). 证明 A 的每个极小素理想都含于 D 中. [用习题 6.]

环 $S_0^{-1}A$ 叫作 A 的**全分式环** (total ring of fractions). 证明

i) S_0 是 A 中使得同态 $A \to S_0^{-1}A$ 是单的最大的乘法封闭子集.

ii) $S_0^{-1}A$ 中每个元或是零因子或是可逆元.

iii) 若一环中每个非可逆元是零因子，则该环与其全分式环相等(即 $A \to S_0^{-1}A$ 是一一的).

10. 设 A 是环.

i) 如果 A 绝对平坦(第二章，习题 27)，S 是 A 中任一乘法封闭子集，那么 $S^{-1}A$ 仍绝对平坦.

ii) A 绝对平坦 $\Longleftrightarrow$ 对 A 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，$A_{\mathfrak{m}}$ 是域.

11. 设 A 是环，求证下述命题等价：

i) $A/\mathfrak{N}$ 绝对平坦($\mathfrak{N}$ 是 A 的小根).

ii) A 中每个素理想极大.

iii) Spec (A) 是 T_1-空间(即由一个点构成的子集是闭集).

iv) Spec (A) 是 Haussdorff 空间.

如果这些条件被满足，证明 Spec (A) 紧且完全不连通(即 Spec (A) 中仅有的连通子集是那些由一个单个点组成的子集).

12. 设 A 是整环，M 是 A-模. M 中元素 x 称作 M 中的**扭元**，如果 Ann (x) $\neq 0$，即如果 x 被 A 中某个非零元零化. 证明 M 中的扭元组成 M 的一个子模. 这个子模称作 M 的**扭子模**，表作 $T(M)$. 如果 $T(M)=0$. 模 M 称作无扭的. 证明

i) 如果 M 是任一 A-模，则 $M/T(M)$ 是**无扭的**.

ii) 如果 $f: M\to N$ 是模同态，那么 $f(T(M))\subseteq T(N)$.

iii) 如果 $0\to M'\to M\to M''$ 是正合序列，那么序列 $0\to T(M')\to T(M)\to T(M'')$ 也是正合序列.

iv) 如果 M 是任意 A-模，那么 $T(M)$ 是 M 到 $K\otimes_A M$ 中的映射 $x\longmapsto 1\otimes x$ 的核，这里 K 是 A 的分式域.

[对 iv)，证明 K 可看作它的子模 $A\xi$ ($\xi\in K$) 的正向极限；利用第一章，习题 15 和 20，说明如果在 $K\otimes M$ 之中 $1\otimes x=0$，那么对某个 $\xi\neq 0$，在 $A\xi\otimes M$ 之中 $1\otimes x=0$ 推出 $\xi^{-1}x=0$.]

13. 设 S 是整环 A 的乘法封闭子集. 用习题 12 的记号，证明 $T(S^{-1}M)=S^{-1}(TM)$. 推出下列命题等价：

i) M 是无扭的.

ii) 对一切素理想 $\mathfrak{p}$，$M_{\mathfrak{p}}$ 是无扭的.

iii) 对所有极大理想 $\mathfrak{m}$，$M_{\mathfrak{m}}$ 是无扭的.

14. M 是 A-模，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想. 设对一切极大理想 $\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}$，有 $M_{\mathfrak{m}}=0$. 证明 $M=\mathfrak{a}M$. [过渡到 $A/\mathfrak{a}$-模 $M/\mathfrak{a}M$，并利

用(3.8).]

15. 设 A 是环，F 是 A-模 A^n. 证明 F 的每个由 n 个元素构成的生成元集合是 F 的基. [令 $x_1, \cdots, x_n$ 是一个生成元集，$e_1, \cdots, e_n$ 是 F 的典范基. 由 $\phi(e_i) = x_i$ 定义 $\phi: F \to F$. 那么 ϕ 是满的，我们须证 ϕ 是同构，由(3.9)我们可设 A 是局部环. 设 N 是 ϕ 的核，令 $k: A/\mathfrak{m}$ 是 A 的同余类域. 由于 F 是平坦 A-模，正合序列 $0 \to N \to F \to F \to 0$ 产生正合序列 $0 \to k \otimes N \to k \otimes F \xrightarrow{1\otimes\phi} k \otimes F \to 0$. $k \otimes F = k^n$ 是 k 上 n 维向量空间；$1 \otimes \phi$ 是满的，因而是一一的，因此 $k \otimes N = 0$. 又由第二章习题 12，N 是有限生成的，因此根据 Nakayama 引理，得 $N=0$. 因此 ϕ 是同构.]

推出 F 的每个生成元素集至少含有 n 个元素.

16. 设 B 是平坦 A-代数，则下述条件等价：

i) 对 A 的一切理想 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{a}^{ec} = \mathfrak{a}$.

ii) $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ 是满映射.

iii) 对 A 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，有 $\mathfrak{m}^e \neq (1)$.

iv) 如果 M 是任意非零 A-模，那么 $M_B \neq 0$.

v) 对每个 A-模 M，M 到 M_B 中的映射 $x \mapsto 1 \otimes x$ 是单的.

[对 i) $\Longrightarrow$ ii)，利用(3.16). ii) $\Longrightarrow$ iii) 显然. iii) $\Longrightarrow$ iv)：设 x 是 M 的一个非零元，令 $M' = Ax$. 由于 B 在 A 上平坦，只需证明 $M'_B \neq 0$. 对某个理想 $\mathfrak{a} \neq (1)$，我们有 $M' \cong A/\mathfrak{a}$，因此 $M'_B \cong B/\mathfrak{a}^e$. 对某个极大理想 $\mathfrak{m}$，有 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$，因此 $\mathfrak{a}^e \subseteq \mathfrak{m}^e \neq (1)$. 因此 $M'_B \neq 0$. iv) $\Longrightarrow$ v)：令 M' 是 $M \to M_B$ 的核. 由于 B 在 A 上平坦，序列 $0 \to M'_B \to M_B \to (M_B)_B$ 正合. 但(在第二章习题 13 中，取 $N = M_B$) 映射 $M_B \to (M_B)_B$ 是单的，因此 $M'_B = 0$，因此 $M' = 0$. v) $\Longrightarrow$ i)：取 $M = A/\mathfrak{a}$.]

这时 B 称作在 A 上**忠实平坦**.

17. 设 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ 是环同态. 如果 $g \circ f$ 平坦，而 g 忠实平坦，则 f 平坦.

18. 设 $f: A \to B$ 是环的平坦同态，设 $\mathfrak{q}$ 是 B 的素理想，令 $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c$。那末 f^*: Spec $(B_{\mathfrak{q}}) \to$ Spec $(A_{\mathfrak{p}})$ 是满映射. [由 (3.10) $B_{\mathfrak{p}}$ 在 $A_{\mathfrak{p}}$ 上平坦，$B_{\mathfrak{q}}$ 是 $B_{\mathfrak{p}}$ 的局部环，因此在 $B_{\mathfrak{p}}$ 上平坦. 因此 $B_{\mathfrak{q}}$ 在 $A_{\mathfrak{p}}$ 上平坦且满足习题 16 的条件(3).]

19. 设 A 是环，M 是 A-模. 用 Supp (M) 表 A 中使得 $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 的集合，称 Supp (M) 为 M 的**支集** (support). 证明下述结果:

i) $M \neq 0 \Longleftrightarrow$ Supp $(M) \neq \emptyset$.

ii) $V(\mathfrak{a}) =$ Supp $(A/\mathfrak{a})$.

iii) 如 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 是正合序列，那么 Supp $(M) =$ Supp $(M') \cup$ Supp (M'').

iv) 如 $M = \Sigma M_i$，那么 Supp$(M) = \cup$ Supp (M_i).

v) 若 M 有限生成，那么 Supp $(M) = V$ (Ann (M)) (因此是 Spec (A) 的闭子集).

vi) 若 M、N 有限生成，那么 Supp $(M \otimes N) =$ Supp $(M) \cap$ Supp (N). [利用第二章，习题 3.]

vii) 若 M 有限生成，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，那么 Supp $(M/\mathfrak{a}M) = V(\mathfrak{a} +$ Ann $(M))$.

viii) 若 $f: A \to B$ 是环同态，M 是有限生成 A-模，那么 Supp $(B \otimes_A M) = f^{*-1}$ (Supp (M)).

20. 设 $f: A \to B$ 是环同态，f^*: Spec $(B) \to$ Spec (A) 是与 f 相伴的映射. 证明

i) A 的每个素理想都是局限理想 $\Longleftrightarrow f^*$ 是满映射.

ii) B 的每个素理想都是扩理想 $\Rightarrow f^*$ 是单映射.

ii) 的逆是否成立?

21. i) 设 A 是环，S 是 A 的乘法封闭子集，$\phi: A \to S^{-1}A$ 是典范同态. 证明 ϕ^*: Spec $(S^{-1}A) \to$ Spec (A) 是 Spec $(S^{-1}A)$ 到它在 $X =$ Spec (A) 中的像上的同胚. 这个象用 $S^{-1}X$ 表示.

特别，如果 $f \in A$，Spec (A_f) 在 X 中的象是主开集 X_f

(第一章,习题 17).

ii) 设 $f: A\to B$ 是环同态. 设 $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, 并设 $f^*: Y\to X$ 是与 f 相伴的映射. 将 $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$与它在X中的典范象 $S^{-1}X$ 等同, 将 $\mathrm{Spec}(S^{-1}B)$ ($=\mathrm{Spec}(f(S)^{-1}B)$) 与它在$Y$中的典范象 $S^{-1}Y$ 等同, 证明 $S^{-1}f^*: \mathrm{Spec}(S^{-1}B)\to \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ 是f^* 在 $S^{-1}Y$ 上的限制,且 $S^{-1}Y = f^{*-1}(S^{-1}X)$.

iii) 设 $\mathfrak{a}$ 是A 的理想, $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}^e$ 是它在 B 中的扩张. 令 $\bar{f}: A/\mathfrak{a}\to B/\mathfrak{b}$ 是由 f 诱导的同态. 若 $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ 与它在X中的典范象 $V(\mathfrak{a})$ 等同, $\mathrm{Spec}(B/\mathfrak{b})$ 与它在Y中的象 $V(\mathfrak{b})$ 等同, 证明 $\bar{f}^*$ 是 f^* 在 $V(\mathfrak{b})$ 上的限制.

iv) 设 $\mathfrak{p}$ 是A的素理想. 在 ii) 中取 $S = A-\mathfrak{p}$, 再如 iii) 那样 $\mathrm{mod}\, S^{-1}\mathfrak{p}$ 约化. 推出Y的子空间 $f^{*-1}(\mathfrak{p})$ 自然同胚于 $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) = \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{p})\otimes_A B)$, 这里 $k(\mathfrak{p})$ 是局部环 $A_\mathfrak{p}$ 的同余类域.

$\mathrm{Spec}(k(\mathfrak{p})\otimes_A B)$称作 f^* 在$\mathfrak{p}$上的**纤维** (fiber).

22. 设A是环, $\mathfrak{p}$ 是A的素理想. 那么 $\mathrm{Spec}(A_\mathfrak{p})$ 在 $\mathrm{Spec}(A)$ 中的典范象等于 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathrm{Spec}(A)$ 中一切开邻域的交.

23. 设A是环, $X=\mathrm{Spec}(A)$, U是X中的主开集(即对某个$f\in A$, $U=X_f$: 见第一章,习题 17).

i) 如果 $U=X_f$, 证明环 $A(U)=A_f$ 只依赖于U, 而不依赖于f.

ii) 设 $U'=X_g$ 是使 $U'\subseteq U$ 的另一主开集. 证明对某个整数 $n>0$ 和某个 $u\in A$, 有方程 $g^n = uf$, 利用这定义一个同态 $\rho: A(U)\to A(U')$ (即 $A_f\to A_g$), 它将 a/f^m 映到 au^m/g^{mn}. 证明ρ只依赖U和U'. 这个同态称作**限制**同态.

iii) 若 $U=U'$, 那么ρ是恒等映射.

iv) 若 $U\supseteq U'\supseteq U''$ 是X中主开集,证明图表

$$\begin{array}{ccc} A(U) & \rightarrow & A(U'') \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & A(U') & \end{array}$$

交换（其中箭头是限制同态）.

v）设 $x(=\mathfrak{p})$ 是 X 中一点，证明

$$\varinjlim_{U\ni x} A(U) \simeq A_{\mathfrak{p}}.$$

对 X 中的每个主开集 U，指定的一个环 $A(U)$ 和适合上面条件 iii）和 iv）的限制同态 ρ，构成了开集基 $(X_f)_{f\in A}$ 上的环的**予层**（presheaf）. v）指出这个予层的**茎**（stalk）的相应的局部环 $A_{\mathfrak{p}}$.

24. 证明习题 23 中的予层有下列性质. 设 $(U_i)_{i\in I}$ 是由主开集构成的 X 的一个覆盖. 对每一个 $i\in I$，设有 $s_i\in A(U_i)$ 使得对每对足码 i, j，s_i 和 s_j 在 $A(U_i\cap U_j)$ 中的象是相等的. 那么存在唯一的 $s\in A(=A(X))$，它在 $A(U_i)$ 中的象是 s_i，对一切 $i\in I$.（这实质上蕴含着予层是一个**层**（sheaf）.）

25. 设 $f: A\rightarrow B$，$g: A\rightarrow C$ 是环同态，设 $h: A\rightarrow B\otimes_A C$ 由 $h(x)=f(x)\otimes g(x)$ 定义. 令 X, Y, Z, T 分别是 $A, B, C, B\otimes_A C$ 的素谱. 那么 $h^*(T)=f^*(Y)\cap g^*(Z)$.

[令 $\mathfrak{p}\in X$。令 $k=k(\mathfrak{p})$ 是在 $\mathfrak{p}$ 处的同余类域. 由习题 21，纤维 $h^{*-1}(\mathfrak{p})$ 是 $(B\otimes_A C)\otimes_A k\cong(B\otimes_A k)\otimes_k(C\otimes_A k)$ 的谱. 因此 $\mathfrak{p}\in h^*(T)\Leftrightarrow(B\otimes_A k)\otimes_k(C\otimes_A k)\neq 0\Leftrightarrow B\otimes_A k\neq 0$ 且 $C\otimes_A k\neq 0\Leftrightarrow\mathfrak{p}\in f^*(Y)\cap g^*(Z)$.]

26. 令 $(B_\alpha, g_{\alpha\beta})$ 是一个环的正向系统. B 是正向极限. 对每个 α，设 $f_\alpha: A\rightarrow B_\alpha$ 是环同态，使得只要 $\alpha\leqslant\beta$，就有 $g_{\alpha\beta}\circ f_\alpha=g_\beta$（即 B_α 组成一个 A-代数的正向系统）. f_α 诱导出 $f: A\rightarrow B$. 证明

$$f^*(\mathrm{Spec}(B))=\bigcap_\alpha f_\alpha^*(\mathrm{Spec}(B_\alpha)).$$

[设 $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)$. 那么 $f^{*-1}(\mathfrak{p})$ 是

$$B\otimes_A k(\mathfrak{p})\cong\varinjlim(B_\alpha\otimes_A k(\mathfrak{p}))$$

的谱（由于张量积与正向极限交换：见第二章，习题20）。由第二章习题21，得到 $f^{*-1}(\mathfrak{p})=\varnothing$ 当且仅当对某个 α，$B_\alpha\otimes_A k(\mathfrak{p})=0$，也就是当且仅当 $f_\alpha^{*-1}(\mathfrak{p})=\varnothing$.]

27. i）设 $f_\alpha: A\to B_\alpha$ 是任意一个 A-代数的有限族，设 $f: A\to B$ 是它们在 A 上的张量积(见第二章，习题23). 那么

$$f^*(\operatorname{Spec}(B))=\bigcap_\alpha f_\alpha^*(\operatorname{Spec}(B_\alpha)).$$

[利用习题25，26.]

ii）设 $f_\alpha: A\to B_\alpha$ 是任意一个 A-代数的有限族，令 $B=\prod_\alpha B_\alpha$. 由 $f(x)=(f_\alpha(x))$ 定义 $f: A\to B$. 那么 $f^*(\operatorname{Spec}(B))=\bigcup_\alpha f_\alpha^*(\operatorname{Spec}(B_\alpha))$.

iii）设 $f: A\to B$ 是环同态，那么 $X=\operatorname{Spec}(A)$ 中形如 $f^*(\operatorname{Spec}(B))$ 的子集满足拓扑空间中闭集的公理. 相应的拓扑是 X 之上的**可构造拓扑**. 它比 Zariski 拓扑细(即有更多的开集，或等价地说，有更多的闭集).

iv）设 X_C 表示被赋予了可构造拓扑的集合 X. 证明 X_C 是拟紧的.

28.（习题27的继续.）

i）对每个 $g\in A$，集合 X_g（第一章，习题17）在可构造拓扑中既开且闭.

ii）用 C' 表示 X 上具如下性质的最小拓扑，即使得集合 X_g 既开且闭，用 $X_{C'}$ 表示被赋予这个拓扑的集合 X. 证明 $X_{C'}$ 是 Hausdorff 空间.

iii）推出恒等映射 $X_C\to X_{C'}$ 是同胚. 因此对某个 $f: A\to B$，X 的子集 E 具有 $f^*(\operatorname{Spec}(B))$ 形状当且仅当它在拓扑 C' 中闭.

iv) 拓扑空间 X_C 是紧 Hausdorff 空间且完全不连通.

29. 设 $f: A \to B$ 是环同态. 证明 f^*: Spec(B)→Spec(A) 对于可构造拓扑来说是连续闭映射（即将闭集映到闭集的连续映射).

30. 证明在 Spec(A) 上的 Zariski 拓扑与可构造拓扑相同当且仅当 $A/\mathfrak{N}$ 是绝对平坦的 (这里 $\mathfrak{N}$ 是 A 的小根). [利用习题11.]

第四章 准素分解

把一个理想分解为准素理想是理想论的传统的柱石. 它为把代数簇分解成它的不可约分支提供了代数基础——但是应公平地指出,代数的描述比朴素的几何学所提示的复杂得多. 从另一种观点看,准素分解是把整数分解为素数幂乘积的一个推广. 在近代的处理中,强调局部化,准素分解不再是理想论的中心工具. 但是,就它本身而言仍然是有趣的. 在这章,我们建立经典的唯一性定理.

交换环的典型例子是 $\mathbf{Z}$ 和域 k 上的多项式环 $k[x_1, \cdots, x_n]$,这两个环都是唯一因子分解整环. 但这对任意交换环并不成立,即使它们是整环(经典的例子是环 $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$,在这个环里,元素 6 有两个本质上不同的分解,$2\cdot 3$ 和 $(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$). 但是,在很广泛的一类环中(Noether 环)有理想(不是元素)的"唯一因子分解"的广义形式.

环 A 中的素理想,在某种意义之下,是素数的推广. 相应的素数幂的推广是准素理想. 环 A 中的理想 $\mathfrak{q}$ 是**准素的**,如果 $\mathfrak{q} \neq A$ 且

$xy \in \mathfrak{q} \Longrightarrow$ 或者 $x \in \mathfrak{q}$ 或者 $y^n \in \mathfrak{q}$ 对某个 $n > 0$. 换句话说,

$\mathfrak{q}$ 是准素的 $\Longleftrightarrow A/\mathfrak{q} \neq 0$ 且 $A/\mathfrak{q}$ 中的每个零因子都是幂 0 的.

显然,每个素理想都是准素的. 准素理想的局限也准素,因为如果 $f: A \to B$ 而 $\mathfrak{q}$ 是 B 中的准素理想,那么 $A/\mathfrak{q}^c$ 是同构于 $B/\mathfrak{q}$ 的子环.

命题 4.1. 令 $\mathfrak{q}$ 是环 A 中的准素理想. 那么 $r(\mathfrak{q})$ 是包有 $\mathfrak{q}$ 的最小素理想.

证明 根据(1.8),只要指出 $\mathfrak{p} = r(\mathfrak{q})$ 是素理想就足够了,令 $xy \in r(\mathfrak{q})$,那么 $(xy)^m \in \mathfrak{q}$ 对某个 $m > 0$,因此,或者 $x^m \in \mathfrak{q}$ 或者 $y^{mn} \in \mathfrak{q}$ 对某个 $n > 0$;即,或者 $x \in r(\mathfrak{q})$ 或者 $y \in r(\mathfrak{q})$. ■

如果 $\mathfrak{p}=r(\mathfrak{q})$，那么 $\mathfrak{q}$ 叫作 $\mathfrak{p}$-**准素**.

例. 1) 在 $\mathbf{Z}$ 中的准素理想是 (0) 和 (p^n)，其中 p 是素数. 因为它们是 $\mathbf{Z}$ 中仅有的具有素根的理想，易检验它们是准素的.

2) 令 $A=k[x,y]$，$\mathfrak{q}=(x,y^2)$. 那么 $A/\mathfrak{q}\cong k[y]/(y^2)$，在 $A/\mathfrak{q}$ 中，零因子都是 y 的倍元，因此是幂 0 的. 于是 $\mathfrak{q}$ 是准素的，它的根 $\mathfrak{p}$ 是 (x,y). 我们有 $\mathfrak{p}^2\subset\mathfrak{q}\subset\mathfrak{p}$（严格包含），所以准素理想不一定是素理想的幂.

3) 反之，素理想的幂 $\mathfrak{p}^n$ 不一定是准素，虽然它的根是素理想 $\mathfrak{p}$. 例如，令 $A=k[x,y,z]/(xy-z^2)$，$\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 分别表示 x,y,z 在 A 中的象. 那么 $\mathfrak{p}=(\bar{x},\bar{z})$ 是素的(由于 $A/\mathfrak{p}\cong k[y]$，是整环)；我们有 $\bar{x}\bar{y}=\bar{z}^2\in\mathfrak{p}^2$，但是 $\bar{x}\notin\mathfrak{p}^2$，$\bar{y}\notin r(\mathfrak{p}^2)=\mathfrak{p}$. 因此 $\mathfrak{p}^2$ 不是准素的. 然而，有下面的结果：

命题 4.2. 如果 $r(\mathfrak{a})$ 是极大的，那么 $\mathfrak{a}$ 是准素的. 特别，极大理想 $\mathfrak{m}$ 的幂是 $\mathfrak{m}$-准素的.

证明 令 $r(\mathfrak{a})=\mathfrak{m}$. $\mathfrak{m}$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 中的象是 $A/\mathfrak{a}$ 的小根，根据(1.8)，$A/\mathfrak{a}$ 只有一个素理想. 因此 $A/\mathfrak{a}$ 的每个元素或者是可逆元或者是幂 0 元，所以 $A/\mathfrak{a}$ 中的每个零因子是幂 0 的. ■

我们将研究把一个理想表示为**准素理想的交**. 首先，有两个引理：

引理 4.3. 如果 $\mathfrak{q}_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 都是 $\mathfrak{p}$-准素的，那么 $\mathfrak{q}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{p}$-准素的.

证明 $r(\mathfrak{q})=r\left(\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i\right)=\bigcap r(\mathfrak{q}_i)=\mathfrak{p}$. 令 $xy\in\mathfrak{q}$，$y\notin\mathfrak{q}$. 那么对某个 i，我们有 $xy\in\mathfrak{q}_i$，$y\notin\mathfrak{q}_i$，由于 $\mathfrak{q}_i$ 是准素的，于是 $x\in\mathfrak{p}$. ■

引理 4.4. 令 $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{p}$-准素理想，x 是 A 的元素. 那么

i) 如果 $x\in\mathfrak{q}$ 则 $(\mathfrak{q}:x)=(1)$；

ii) 如果 $x\notin\mathfrak{q}$ 则 $(\mathfrak{q}:x)$ 是 $\mathfrak{p}$-准素的，因此 $r(\mathfrak{q}:x)=\mathfrak{p}$；

iii) 如果 $x\notin\mathfrak{p}$ 则 $(\mathfrak{q}:x)=\mathfrak{q}$.

证明 i) 和 iii) 由定义立即可得.

ii): 如果 $y\in(\mathfrak{q}:x)$, 那么 $xy\in\mathfrak{q}$, 因此 (当 $x\notin\mathfrak{q}$) 我们有 $y\in\mathfrak{p}$. 所以 $\mathfrak{q}\subseteq(\mathfrak{q}:x)\subseteq\mathfrak{p}$; 取根, 得到 $r(\mathfrak{q}:x)=\mathfrak{p}$. 令 $yz\in(\mathfrak{q}:x)$, $y\notin\mathfrak{p}$; 那么 $xyz\in\mathfrak{q}$, 因此 $xz\in\mathfrak{q}$, 于是 $z\in(\mathfrak{q}:x)$. ■

在 A 中的理想 $\mathfrak{a}$ 的**准素分解**指的是将 $\mathfrak{a}$ 表成有限个准素理想交的表达式,就是说

$$\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i. \tag{1}$$

(一般,这样一个准素分解不一定存在;在这一章里,我们将把我们的注意限制到具有准素分解的理想上.) 而且,如果 (i) $r(\mathfrak{q}_i)$ 都不相同,(ii) 我们有 $\mathfrak{q}_i\not\supseteq\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, 那么准素分解(1)就叫作**极小的**(或不可缩短的,或约简的,或正规的,…). 由(4.3)我们可以达到(i),然后我们可以去掉任何多余的项达到 (ii);因此,任何准素分解都可以约简成极小的. 我们说 $\mathfrak{a}$ 是**可分解的**, 如果它有一个准素分解.

定理 4.5. (第一唯一性定理). 令 $\mathfrak{a}$ 是一个可分解的理想, 而 $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{a}$ 的极小准素分解令 $\mathfrak{p}_i=r(\mathfrak{q}_i)(1\leqslant i\leqslant n)$. 那么 $\mathfrak{p}_i$ 恰是在理想集合 $r(\mathfrak{a}:x)$ $(x\in A)$ 中出现的素理想, 因此与 $\mathfrak{a}$ 的特殊分解无关.

证明. 对于任何 $x\in A$, 我们有 $(\mathfrak{a}:x)=(\bigcap\mathfrak{q}_i:x)=\bigcap(\mathfrak{q}_i:x)$, 因此由(4.4) $r(\mathfrak{a}:x)=\bigcap_{i=1}^{n}r(\mathfrak{q}_i:x)=\bigcap_{x\notin\mathfrak{q}_j}\mathfrak{p}_j$. 假设 $r(\mathfrak{a}:x)$ 是素的,那么由(1.11),有某个 j 使 $r(\mathfrak{a}:x)=\mathfrak{p}_j$. 因此形如 $r(\mathfrak{a}:x)$ 的每个素理想都是 $\mathfrak{p}_j$ 中的一个. 反之, 对每个 i, 存在 $x_i\notin\mathfrak{q}_i$, $x_i\in\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j$, 因为分解是极小的. 我们得到 $r(\mathfrak{a}:x_i)=\mathfrak{p}_i$. ■

注记. 1) 上面的证明与(4.4)的最后一部分一起,指明对每个 i, 在 A 中存在 x_i, 使得 $(\mathfrak{a}:x_i)$是 $\mathfrak{p}_i$-准素.

2) 将 $A/\mathfrak{a}$看作 A-模, (4.5)等价于说 $\mathfrak{p}_i$ 恰是作为 $A/\mathfrak{a}$ 的元

素的零化子的根而出现的素理想.

例. 在 $A=k[x,y]$ 中，令 $\mathfrak{a}=(x^2,xy)$. 那么 $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2^2$，其中 $\mathfrak{p}_1=(x)$，$\mathfrak{p}_2=(x,y)$. 由(4.2)，理想 $\mathfrak{p}_2^2$ 是准素的. 这时 $\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2^2$ 的根分别是素理想 $\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2$. 在这个例中，$\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2$，我们有 $r(\mathfrak{a})=\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2=\mathfrak{p}_1$，但是 $\mathfrak{a}$ 不是准素理想.

在(4.5)中的素理想 $\mathfrak{p}_i$ 说是**属于** $\mathfrak{a}$，或者与 $\mathfrak{a}$ **相伴**. 理想 $\mathfrak{a}$ 是准素的当且仅当它只有一个相伴的素理想. 集合 $\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n\}$ 的极小元素叫作属于 $\mathfrak{a}$ 的**极小的**或**孤立的**素理想. 其余的叫作**嵌入**素理想. 在上面的例中，$\mathfrak{p}_2=(x,y)$ 是嵌入素理想.

命题 4.6. 令 $\mathfrak{a}$ 是一个可分解理想. 那么任何素理想 $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$ 都包含一个属于 $\mathfrak{a}$ 的极小素理想. 因此 $\mathfrak{a}$ 的极小素理想恰是包含 $\mathfrak{a}$ 的所有素理想集合中的极小元.

证明. 如果 $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$，那么 $\mathfrak{p}=r(\mathfrak{p})\supseteq\bigcap_i r(\mathfrak{q}_i)=\bigcap\mathfrak{p}_i$. 因此由(1.11)，我们有 $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{p}_i$. 对某个 i. 于是 $\mathfrak{p}$ 包含有 $\mathfrak{a}$ 的一个极小素理想. ■

注记. 1) 孤立和嵌入的名字来源于几何. 如果 $A=k[x_1,\cdots,x_n]$，其中 k 是域，那么理想 $\mathfrak{a}$ 给出一个簇 $X\subseteq k^n$ (见第一章习题 27). 极小素理想 $\mathfrak{p}_i$ 对应 X 的不可约分支，嵌入素理想对应它们的子簇，即，嵌入不可约分支的簇. 因此在(4.6)前面的例中，由 $\mathfrak{a}$ 所定义的簇是直线 $x=0$，而嵌入理想 $\mathfrak{p}_2=(x,y)$ 对应原点(0,0).

2) 所有准素分支与分解无关的说法并不成立. 例如，$(x^2,xy)=(x)\cap(x,y)^2=(x)\cap(x^2,y)$ 是两个不同的极小准素分解. 但是，存在某些唯一性的性质：见(4.10).

命题 4.7. 令 $\mathfrak{a}$ 是可分解理想，$\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是一个极小准素分解，$r(\mathfrak{q}_i)=\mathfrak{p}_i$. 那么

$$\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i=\{x\in A:(\mathfrak{a}:x)\neq\mathfrak{a}\}.$$

特别，如果零理想是可分解的，A 的零因子的集合 D 是属于 0 的素理想的并.

证明. 如果 $\mathfrak{a}$ 是可分解的，那么 0 在 $A/\mathfrak{a}$ 中是可分解的：即 $0=\bigcap\bar{\mathfrak{q}}_i$，其中 $\bar{\mathfrak{q}}_i$ 是 $\mathfrak{q}_i$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 中的象，是准素的. 因此只要证明(4.7)的最后一个断言就够了. 由(1.15)，我们有 $D=\bigcup\limits_{x\neq 0}r(0:x)$；由(4.5)的证明，我们有 $r(0:x)=\bigcap\limits_{x\notin\mathfrak{q}_j}\mathfrak{p}_j\subseteq\mathfrak{p}_j$ 对某个 j，因此 $D\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$. 仍由(4.5)，每个 $\mathfrak{p}_i$ 具有形式 $r(0:x)$ 对某个 $x\in A$，于是 $\bigcup\mathfrak{p}_i\subseteq D$. ■

因此(当零理想是可分解时)

$$\begin{aligned}D&=\text{零因子的集合}\\&=\text{属于 0 的所有素理想的并；}\\\mathfrak{N}&=\text{幂 0 元的集合}\\&=\text{属于 0 的所有极小素理想的交.}\end{aligned}$$

下边我们研究准素理想在局部化下所发生的变化.

命题 4.8. 令 S 是 A 的乘法封闭子集，$\mathfrak{q}$ 是一个 $\mathfrak{p}$-准素理想.

i) 如果 $S\cap\mathfrak{p}\neq\varnothing$，那么 $S^{-1}\mathfrak{q}=S^{-1}A$.

ii) 如果 $S\cap\mathfrak{p}=\varnothing$，那么 $S^{-1}\mathfrak{q}$ 是 $S^{-1}\mathfrak{p}$-准素，它在 A 中的局限是 $\mathfrak{q}$.

因此，在 $S^{-1}A$ 中的理想与 A 中的局限理想之间的对应(3.11)中，准素理想对应准素理想.

证明. i) 如果 $s\in S\cap\mathfrak{p}$，那么 $s^n\in S\cap\mathfrak{q}$ 对某个 $n>0$；因此 $S^{-1}\mathfrak{q}$ 包含 $s^n/1$，它在 $S^{-1}A$ 中是可逆元.

ii) 如果 $S\cap\mathfrak{p}=\varnothing$，那么 $s\in S$ 和 $as\in\mathfrak{q}$ 推出 $a\in\mathfrak{q}$，因此由(3.11)，$\mathfrak{q}^{ec}=\mathfrak{q}$. 再由(3.11)，我们有 $r(\mathfrak{q}^e)=r(S^{-1}\mathfrak{q})=S^{-1}r(\mathfrak{q})=S^{-1}\mathfrak{p}$. 可直接检验 $S^{-1}\mathfrak{q}$ 是准素的. 最后，准素理想的局限是准素的. ■

对于任何理想 $\mathfrak{a}$ 和 A 中的乘法封闭子集 S，理想 $S^{-1}\mathfrak{a}$ 在 A 中

的局限用 $S(\mathfrak{a})$ 表示.

命题 4.9. 令 S 是 A 的乘法封闭子集, $\mathfrak{a}$ 是可分解的理想, $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个极小准素分解. 令 $\mathfrak{p}_i=r(\mathfrak{q}_i)$, 假设给 $\mathfrak{q}_i$ 如此编号,使得 S 与 $\mathfrak{p}_{m+1},\cdots,\mathfrak{p}_n$ 相交而不与 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_m$ 相交. 那么

$$S^{-1}\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{m}S^{-1}\mathfrak{q}_i,\quad S(\mathfrak{a})=\bigcap_{i=1}^{m}\mathfrak{q}_i,$$

而且它们是极小准素分解.

证明. 由(3.11) $S^{-1}\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}S^{-1}\mathfrak{q}_i$, 再由(4.8)又 $=\bigcap_{i=1}^{m}S^{-1}\mathfrak{q}_i$, $S^{-1}\mathfrak{q}_i$ 是 $S^{-1}\mathfrak{p}_i$-准素, 对 $i=1,\cdots,m$. 由于 $\mathfrak{p}_i$ 是不同的, $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 不同,因此我们有极小准素分解. 两边取局限,再用(4.8),我们得到

$$S(\mathfrak{a})=(S^{-1}\mathfrak{a})^c=\bigcap_{i=1}^{m}(S^{-1}\mathfrak{q}_i)^c=\bigcap_{i=1}^{m}\mathfrak{q}_i.\quad\blacksquare$$

属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想集合Σ叫作**孤立的**, 如果它满足下面的条件: 如果 $\mathfrak{p}'$ 是属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想且 $\mathfrak{p}'\subseteq\mathfrak{p}$, 对某个 $\mathfrak{p}\in\Sigma$, 那么 $\mathfrak{p}'\in\Sigma$.

令 Σ 是属于 $\mathfrak{a}$ 的孤立的素理想集合,而 $S=A-\bigcup_{\mathfrak{p}\in\Sigma}\mathfrak{p}$. 那么 S 是乘法封闭的,而且对属于 $\mathfrak{a}$ 的任何素理想 $\mathfrak{p}'$, 我们有

$$\mathfrak{p}'\in\Sigma\Longrightarrow\mathfrak{p}'\cap S=\varnothing;$$

$$\mathfrak{p}'\notin\Sigma\Longrightarrow\mathfrak{p}'\nsubseteq\bigcup_{\mathfrak{p}\in\Sigma}\mathfrak{p}\,(\text{由}(1.11))\Longrightarrow\mathfrak{p}'\cap S\neq\varnothing.$$

因此,由(4.9),我们导出

定理 4.10. (第二唯一性定理) 令 $\mathfrak{a}$ 是一个可分解的理想, $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{a}$ 的极小准素分解,令 $\{\mathfrak{p}_{i_1},\cdots,\mathfrak{p}_{i_m}\}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的素理想的孤立集合. 那么 $\mathfrak{q}_{i_1}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_{i_m}$ 与分解无关.

特别:

系理 4.11. 孤立准素分支(即, 与极小素理想 $\mathfrak{p}_i$ 相对应的准素分支 $\mathfrak{q}_i$) 由 $\mathfrak{a}$ 唯一决定.

(4.10)的证明. 我们有 $\mathfrak{q}_{i_1}\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_{i_m}=S(\mathfrak{a})$, 其中 $S=$

$A-\mathfrak{p}_{i_1}\cup\cdots\cup\mathfrak{p}_{i_m}$，因此只依赖于 $\mathfrak{a}$（因为 $\mathfrak{p}_i$ 只依赖于 $\mathfrak{a}$）. ■

注记. 另一方面，嵌入准素分支一般不由 $\mathfrak{a}$ 唯一决定. 如果 A 是 Noether 环，对每个嵌入分支实际上存在无穷多种选择（见第八章，习题 1）.

习　　题

1. 如果理想 $\mathfrak{a}$ 有准素分解，那么 $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ 只有有限多个不可约分支.
2. 如果 $\mathfrak{a}=r(\mathfrak{a})$，那么 $\mathfrak{a}$ 没有嵌入素理想.
3. 如果 A 绝对平坦，则每个准素理想极大.
4. 在多项式环 $\mathbf{Z}[t]$ 之中，理想 $\mathfrak{m}=(2,t)$ 是极大的，理想 $\mathfrak{q}=(4,t)$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的，但它不是 $\mathfrak{m}$ 的幂.
5. 设 K 是域，x,y,z 是无关未定元，在多项式环 $K[x,y,z]$ 中设 $\mathfrak{p}_1=(x,y)$，$\mathfrak{p}_2=(x,z)$，$\mathfrak{m}=(x,y,z)$；$\mathfrak{p}_1$ 与 $\mathfrak{p}_2$ 是素理想，$\mathfrak{m}$ 是极大理想. 设 $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$，证明 $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2\cap\mathfrak{m}^2$ 是 $\mathfrak{a}$ 的约简的准素分解. 该分解中哪些分支是孤立的，哪些分支是嵌入的？
6. 设 X 是无限的紧 Hausdorff 空间，$C(X)$ 是 X 上的实值连续函数环（第一章，习题 26），该环中的零理想是不可分解的吗？
7. 设 A 是环，$A[x]$ 表示 A 上一个未定元的多项式环. 对 A 的每个理想 $\mathfrak{a}$，设 $\mathfrak{a}[x]$ 表示 $A[x]$ 中系数在 $\mathfrak{a}$ 中的一切多项式的集合.

    i) $\mathfrak{a}[x]$ 是 $\mathfrak{a}$ 到 $A[x]$ 中的扩张.

    ii) 如果 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想，那么 $\mathfrak{p}[x]$ 是 $A[x]$ 的素理想.

    iii) 如果 $\mathfrak{q}$ 是 A 的 $\mathfrak{p}$-准素理想，那么 $\mathfrak{q}[x]$ 是 $A[x]$ 中的 $\mathfrak{p}[x]$-准素理想. [利用第一章，习题 2.]

    iv) 如果 $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$ 是 A 中的一个极小准素分解，那么 $\mathfrak{a}[x]=$

$\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i[x]$ 是 $A[x]$ 中的一个极小准素分解.

v) 如果 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的一个极小素理想，那么 $\mathfrak{p}[x]$ 是 $\mathfrak{a}[x]$ 的一个极小素理想.

8. 设 k 是域. 证明在多项式环 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 中，理想 $\mathfrak{p}=(x_1,\cdots,x_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 都是素理想，它们所有的幂都是准素理想. [利用习题 7.]

9. 在环 A 中，用 $D(A)$ 表示满足下列条件的素理想 $\mathfrak{p}$ 的集合: 存在 $a\in A$，使得 $\mathfrak{p}$ 是包含 $(0:a)$ 的素理想集合中的极小元. 证明 $x\in A$ 是零因子 $\Longleftrightarrow x\in\mathfrak{p}$ 对某个 $\mathfrak{p}\in D(A)$.

令 S 是 A 的乘法封闭子集，将 $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ 与它在 $\mathrm{Spec}(A)$ 中的象等同 (见第三章，习题 21). 证明

$$D(S^{-1}A)=D(A)\cap\mathrm{Spec}(S^{-1}A).$$

如果零理想有准素分解，证明 $D(A)$ 是零的相伴素理想的集合.

10. 对环 A 中的任一素理想 $\mathfrak{p}$，用 $S_{\mathfrak{p}}(0)$ 表示同态 $A\to A_{\mathfrak{p}}$ 的核. 证明:

i) $S_{\mathfrak{p}}(0)\subseteq\mathfrak{p}$.

ii) $r(S_{\mathfrak{p}}(0))=\mathfrak{p}\Longleftrightarrow\mathfrak{p}$ 是 A 的极小素理想.

iii) 如果 $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{p}'$，那么 $S_{\mathfrak{p}}(0)\subseteq S_{\mathfrak{p}'}(0)$.

iv) $\bigcap_{\mathfrak{p}\in D(A)} S_{\mathfrak{p}}(0)=0$，这里 $D(A)$ 由习题 9 定义.

11. 如果 $\mathfrak{p}$ 是环 A 的极小素理想，证明 $S_{\mathfrak{p}}(0)$ (习题 10) 是最小的 $\mathfrak{p}$-准素理想.

令 $\mathfrak{a}$ 是理想 $S_{\mathfrak{p}}(0)$ 的交，这里 $\mathfrak{p}$ 跑遍 A 的极小素理想. 证明 $\mathfrak{a}$ 包含在 A 的小根之中.

假设零理想不可分解. 证明 $\mathfrak{a}=0$ 当且仅当零的每个素理想是孤立的.

12. 设 A 是环，S 是 A 的乘法封闭子集. 对任一理想 $\mathfrak{a}$，用 $S(\mathfrak{a})$ 表示 $S^{-1}\mathfrak{a}$ 在 A 中的限制. 理想 $S(\mathfrak{a})$ 称作 $\mathfrak{a}$ 关于 S 的**饱和化**.

证明:

i) $S(\mathfrak{a})\cap S(\mathfrak{b})=S(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})$;

ii) $S(r(\mathfrak{a}))=r(S(\mathfrak{a}))$;

iii) $S(\mathfrak{a})=(1)\Longleftrightarrow\mathfrak{a}$ 与 S 有交;

iv) $S_1(S_2(\mathfrak{a}))=(S_1S_2)(\mathfrak{a})$.

如果 $\mathfrak{a}$ 有准素分解,证明理想 $S(\mathfrak{a})$ 的集合(这里 S 跑遍 A 的一切乘法封闭子集)是有限的.

13. 设 A 是环, $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想. $\mathfrak{p}$ 的第 n 个**符号幂**定义作理想(按习题 12 的记号)

$$\mathfrak{p}^{(n)}=S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^n),$$

这里 $S_{\mathfrak{p}}=A-\mathfrak{p}$. 证明

i) $\mathfrak{p}^{(n)}$ 是 $\mathfrak{p}$-准素理想;

ii) 如果 $\mathfrak{p}^n$ 有准素分解,那么 $\mathfrak{p}^{(n)}$ 是它的 $\mathfrak{p}$-准素分支;

iii) 如果 $\mathfrak{p}^{(m)}\mathfrak{p}^{(n)}$ 有准素分解,那么 $\mathfrak{p}^{(m+n)}$ 是它的 $\mathfrak{p}$-准素分支;

iv) $\mathfrak{p}^{(n)}=\mathfrak{p}^n\Longleftrightarrow\mathfrak{p}^n$*) 是 $\mathfrak{p}$-准素的.

14. 令 $\mathfrak{a}$ 是环 A 中的一个可分解理想,设 $\mathfrak{p}$ 是理想 $(\mathfrak{a}:x)$ 的集合中的一个极大元,这里 $x\in A$ 而 $x\notin\mathfrak{a}$.证明 $\mathfrak{p}$ 是属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想.

15. 设 $\mathfrak{a}$ 是环 A 中的一个可分解理想,设Σ是属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想的一个孤立集, 设 $\mathfrak{q}_\Sigma$ 是相应的准素分支的交. 设 f 是 A 中的一个元素, 使对每个属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想 $\mathfrak{p}$, 有 $f\in\mathfrak{p}\Longleftrightarrow\mathfrak{p}\notin\Sigma$, 又设 S_f 是 f 的一切幂的集合. 证明对一切大的 n, 有 $\mathfrak{q}_\Sigma=S_f(\mathfrak{a})=(\mathfrak{a}:f^n)$.

16. 设 A 是环, 其中每个理想有准素分解, 证明每个分式环 $S^{-1}A$ 也具有同样的性质.

17. 设 A 是有下述性质的环.

(L_1) 对于 A 中每个理想 $\mathfrak{a}\neq(1)$ 和每个素理想 $\mathfrak{p}$, 存在 $x\notin\mathfrak{p}$ 使 $S_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})=(\mathfrak{a}:x)$, 这里 $S_{\mathfrak{p}}=A\backslash\mathfrak{p}$.

---

*) 原书误为 $\mathfrak{p}^{(n)}$.——译者注

那么 A 中每个理想是(可能无限多个)准素理想的交.

[令 $\mathfrak{a}$ 是 A 中 $\neq(1)$ 的一个理想,令 $\mathfrak{p}_1$ 是包含 $\mathfrak{a}$ 的素理想集合中的极小元. 那么 $\mathfrak{q}_1=S_{\mathfrak{p}_1}(\mathfrak{a})$ 是 $\mathfrak{p}_1$-准素理想(由习题 11),且对某个 $x\notin\mathfrak{p}_1$, 有 $\mathfrak{q}_1=(\mathfrak{a}:x)$. 证明 $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap(\mathfrak{a}+(x))$.

现在设 $\mathfrak{a}_1$ 是满足 $\mathfrak{b}\supseteq\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}_1\cap\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ 的理想集合中的极大元,选取 $\mathfrak{a}_1$, 使 $x\in\mathfrak{a}_1$, 因此 $\mathfrak{a}_1\nsubseteq\mathfrak{p}_1$. 对 $\mathfrak{a}_1$ 再重复前述的过程, 等等. 在第 n 步, 我们有 $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n\cap\mathfrak{a}_n$, 这里 $\mathfrak{q}_i$ 是准素理想, $\mathfrak{a}_n$ 是含有 $\mathfrak{a}_{n-1}=\mathfrak{a}_n\cap\mathfrak{q}_n$, 使 $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n\cap\mathfrak{b}$ 且 $\mathfrak{a}_n\nsubseteq\mathfrak{p}_n$ 的理想 $\mathfrak{b}$ 之中的极大理想. 如果在某一步, 有 $\mathfrak{a}_n=(1)$, 过程停止, 于是 $\mathfrak{a}$ 是有限个准素理想的交. 否则, 利用超限归纳法, 可继续作下去, 并注意每个 $\mathfrak{a}_n$ 严格包含 $\mathfrak{a}_{n-1}$.]

18. 考虑下述关于环 A 的条件:

(L_2) 给了一个理想和 A 的乘法封闭子集的降链 $S_1\supseteq S_2\supseteq\cdots\supseteq S_n\supseteq\cdots$,存在一个整数 n 使 $S_n(\mathfrak{a})=S_{n+1}(\mathfrak{a})=\cdots$.

证明下述条件等价:

i) A 中每个理想有准素分解;

ii) A 适合 (L_1) 与 (L_2).

[对 i) $\Longrightarrow$ ii), 利用习题 12 和 15. 对 ii) $\Longrightarrow$ i), 用习题 17 证明中的记号,证明如果 $S_n=S_{\mathfrak{p}_1}\cap\cdots\cap S_{\mathfrak{p}_n}$, 那么 S_n 与 $\mathfrak{a}_n$ 相交, 因此 $S_n(\mathfrak{a}_n)=(1)$, 因此 $S_n(\mathfrak{a})=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$. 再利用 ($L_2$) 证明这个构造在有限步后一定终止.]

19. 设 A 是环, $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想. 证明每个 $\mathfrak{p}$-准素理想含有 $S_{\mathfrak{p}}(0)$, 即典范同态 $A\to A_{\mathfrak{p}}$ 的核.

设 A 满足下述条件: 对每个素理想 $\mathfrak{p}$, A 的一切 $\mathfrak{p}$-准素理想的交等于 $S_{\mathfrak{p}}(0)$. (Noether 环满足这个条件: 见第十章.) 令 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n$ 是不同的素理想,其中没有一个是 A 的极小素理想. 那么存在 A 中一个理想 $\mathfrak{a}$, 它的相伴素理想是 $\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n$.

[对 n 归纳证明. 当 $n=1$ 是显然的(取 $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}_1$). 假设

$n>1$，设 $\mathfrak{p}_n$ 是集合 $\{\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_n\}$ 中极大元．由归纳假设，存在一个理想 $\mathfrak{b}$ 和它的一个极小准素分解 $\mathfrak{b}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_{n-1}$，这里每个 $\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{p}_i$-准素的．如果 $\mathfrak{b}\subseteq S_{\mathfrak{p}_n}(0)$，设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的包含于 $\mathfrak{p}_n$ 之中的一个极小素理想．那么 $S_{\mathfrak{p}_n}(0)\subseteq S_{\mathfrak{p}}(0)$，因此 $\mathfrak{b}\subseteq S_{\mathfrak{p}}(0)$．取根，利用习题 10，我们有 $\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_{n-1}\subseteq\mathfrak{p}$，因此有某个 $\mathfrak{p}_i\subseteq\mathfrak{p}$，由于 $\mathfrak{p}$ 是极小的，因此 $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{p}$．这与没有一个 $\mathfrak{p}_i$ 是极小理想矛盾．因此 $\mathfrak{b}\not\subseteq S_{\mathfrak{p}_n}(0)$，且存在一个 $\mathfrak{p}_n$-准素理想 $\mathfrak{q}_n$，使 $\mathfrak{b}\not\subseteq\mathfrak{q}_n$．证明 $\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$ 具有所要求的性质。

模的准素分解

实际上，本章全部内容都可以搬到环 A 的模上面去．下面这些习题指出如何去做这件事．

20. 设 M 是一个固定的 A-模，N 是 M 的子模．N 在 M 中的**根**定义为

$$r_M(N)=\{x\in A:x^qM\subseteq M\ \text{对某个}\ q>0\}.$$

证明 $r_M(N)=r(N:M)=r(\mathrm{Ann}(M/N))$．特别，$r_M(N)$ 是一个理想．

叙述并证明对 r_M 的类似于(1.13)的公式．

21. 元素 $x\in A$ 定义一个 M 的同态 ϕ_x，即 $m\longmapsto xm$．元素 x 称作 M 中的**零因子**（相应地，**幂零元**），如果 ϕ_x 不是单映射（相应地，是幂零映射）．称 M 的子模 Q 是**准素的**，如果 $Q\neq M$，且 M/Q 中的每个零因子是幂零的．

证明如果 Q 在 M 中准素，那么 $(Q:M)$ 是准素理想，因此 $r_M(Q)$ 是个素理想 $\mathfrak{p}$．我们说 Q（在 M 中）是 $\mathfrak{p}$-**准素的**．

证明与(4.3)、(4.4)类似的结果．

22. M 的子模 N 的**一个在 M 中的准素分解**是将 N 表为 M 的准素子模的交

$$N=Q_1\cap\cdots\cap Q_n$$

如果理想 $\mathfrak{p}_i=r_M(Q_i)$ 全都不同，又没有一个分支 Q_i 可从

交中去掉，即 $Q_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} Q_j (1 \leqslant i \in n)$，则称上述分解为**极小准素分解**.

证明与(4.5)类似的结果，即素理想 $\mathfrak{p}_i$ 仅依赖于 N（和 M）. 这些素理想称为**在 M 中属于** N 的素理想. 证明它们也是在 M/N 中属于 0 的素理想.

23. 叙述并证明与(4.6)—(4.11)类似的全部结果.（不失一般性，可取 $N=0$.）

第五章　整相关性和赋值

在经典的代数几何中，常常通过把曲线投影到直线上和把它们看作直线的一个(分歧)覆盖的方法来研究曲线．这与数域和有理域之间的关系，更确切地说它们的整数环之间的关系是非常类似的．它们的共同的代数特点是整相关的概念．在这一章，我们证明几个关于整相关的结果．特别是，我们证明关于素理想在整扩张中的 Cohen-Seidenberg 的定理（“上升”（“going-up”）和“下降”（“going-down”）定理）．在最后的习题中，我们讨论代数几何的情况，特别要讨论正规化引理．

我们还简单地讨论一下赋值．

整相关性

令 B 是环，A 是 B 的子环(因此 $1\in A$)．B 的元素 x 叫作在 A 上**整**，如果 x 是系数在 A 中，且首项系数是 1 的多项式的根，即，如果 x 满足方程

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{1}$$

其中 a_i 是 A 的元素．显然，A 的每个元素在 A 上整．

例 5.0.　$A=\mathbf{Z}$，$B=\mathbf{Q}$．如果一个有理数 $x=r/s$，其中 r，s 没有公因子，在 $\mathbf{Z}$ 上是整的，由(1)我们有

$$r^n + a_1r^{n-1}s + \cdots + a_ns^n = 0,$$

其中 a_i 是有理整数．因此 s 是 r^n 的因子，于是 $s=\pm1$，得到 $x\in\mathbf{Z}$．

命题 5.1.　下面的断言是等价的：

i) $x\in B$ 在 A 上整；

ii) $A[x]$是有限生成 A-模；

iii) $A[x]$ 包含在B的子环C中，而C是有限生成A-模；

iv) 存在一个忠实 $A[x]$-模 M，它作为 A-模是有限生成的.

证明. i)$\Longrightarrow$ii). 由(1)我们有

$$x^{n+r}=-(a_1x^{n+r-1}+\cdots+a_nx^r)$$

对所有 $r\geqslant 0$；因此，由归纳法，x 的所有正幂次都属于由 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 生成的 A-模之中. 因此 $A[x]$（作为 A-模）是由 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 生成的.

ii)$\Longrightarrow$iii). 取 $C=A[x]$.

iii)$\Longrightarrow$iv). 取 $M=C$，它是忠实 $A[x]$-模（因为 $yC=0\Longrightarrow y\cdot 1=0$）.

iv)$\Longrightarrow$i). 可由(2.4)得到：取 ϕ 是将M的元素乘以 x 的映射，$\mathfrak{a}=A$（我们有 $xM\subseteq M$，因为M是 $A[x]$-模）；由于M是忠实的，我们有 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 对适当的 $a_i\in A$. ■

系理 5.2. 令 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 是B的元素，且每个都在A上整. 那么环 $A[x_1,\cdots,x_n]$ 是有限生成 A-模.

证明. 对 n 作归纳法. $n=1$ 的情况是(5.1)的一部分. 假设 $n>1$，令 $A_r=A[x_1,\cdots,x_r]$；那么由归纳假设，A_{n-1} 是有限生成 A-模. $A_n=A_{n-1}[x_n]$ 是有限生成 A_{n-1}-模（由于 x_n 在 A_{n-1} 上整，用 $n=1$ 的情况）. 由(2.16)，A_n作为 A-模是有限生成的. ■

系理 5.3. B的在A上整的元素的集合C是B的一个子环，且包有 A.

证明. 如果$x,y\in C$，那么由(5.2)，$A[x,y]$ 是有限生成 A-模. 由(5.1)的 iii)，$x\pm y$ 和 xy 在A上整. ■

(5.3)中的环C叫作A在B中的**整闭包**. 如果 $C=A$，那么A叫作在B中**整闭**. 如果 $C=B$，环B叫作在A上**整**.

注记. 令 $f:A\to B$ 是一个环同态，于是B是 A-代数. 如果B在子环 $f(A)$ 上是整的，那么 f 叫做**整的**，而B叫作**整的 A-代数**. 用这个术语，上面的结果表明

有限型 + 整的 = 有限.

系理 5.4. 如果 $A \subseteq B \subseteq C$ 是环，B 在 A 上整，C 在 B 上整，那么 C 在 A 上整(整相关的传递性).

证明. 令 $x \in C$，那么我们有方程

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \qquad (b_i \in B).$$

由 (5.2)，环 $B' = A[b_1, \cdots, b_n]$ 是有限生成 A-模，$B'[x]$ 是有限生成 B'-模(因 x 在 B' 上整). 因此，由 (2.16)，$B'[x]$ 是有限生成 A-模，由(5.1)的 iii)，x 在 A 上整. ■

系理 5.5. 令 $A \subseteq B$ 是环，C 是 A 在 B 中的整闭包. 那么 C 在 B 中是整闭的.

证明. 令 $x \in B$ 在 C 上整. 由 (5.4)，x 在 A 上整，因此 $x \in C$. ■

下边的命题指出，过渡到商环和分式环时，整相关性质仍被保持:

命题 5.6. 令 $A \subseteq B$ 是环，B 在 A 上整.

i) 如果 $\mathfrak{b}$ 是 B 的理想，$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = A \cap \mathfrak{b}$，那么 $B/\mathfrak{b}$ 在 $A/\mathfrak{a}$ 上整.

ii) 如果 S 是 A 的乘法封闭子集，那么 $S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上整.

证明. i) 如果 $x \in B$，我们有 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$，其中 $a_i \in A$. mod $\mathfrak{b}$ 约化这个方程.

ii) 令 $x/s \in S^{-1}B$ $(x \in B, s \in S)$. 那么上面的方程给出

$$(x/s)^n + (a_1/s)(x/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s^n = 0,$$

它表明 x/s 在 $S^{-1}A$ 上整. ■

上升 (GOING-UP) 定理

命题 5.7. 令 $A \subseteq B$ 是整环，B 在 A 上整. 那么 B 是域当且仅当 A 是域.

证明. 假设 A 是域；令 $y \in B$，$y \neq 0$. 令

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (a_i \in A)$$

是对于 y 的最小可能次数的整相关方程. 由于 B 是整环，我们有 $a_n \neq 0$，$y^{-1} = -a_n^{-1}(y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \cdots + a_{n-1}) \in B$，因此 B 是域.

反之，假设 B 是域，令 $x \in A$，$x \neq 0$. 那么 $x^{-1} \in B$，于是它在 A 上整. 我们有方程

$$x^{-m} + a'_1 x^{-m+1} + \cdots + a'_m = 0 \qquad (a'_i \in A).$$

由此，$x^{-1} = -(a'_1 + a'_2 x + \cdots + a'_m x^{m-1}) \in A$，因此 A 是域. ■

系理 5.8. 令 $A \subseteq B$ 是环，B 在 A 上整；令 $\mathfrak{q}$ 是 B 的素理想，$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q} \cap A$. 那么 $\mathfrak{q}$ 是极大的当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是极大的.

证明. 由(5.6)，$B/\mathfrak{q}$ 在 $A/\mathfrak{q}$ 上整，这两个环都是整环. 再用(5.7). ■

系理 5.9. 令 $A \subseteq B$ 是环，B 在 A 上整；令 $\mathfrak{q}$，$\mathfrak{q}'$ 是 B 的素理想，使得 $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$，$\mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}'^c = \mathfrak{p}$. 那么 $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$.

证明. 由(5.6)，$B_\mathfrak{p}$ 在 $A_\mathfrak{p}$ 上整. 令 $\mathfrak{m}$ 是 $\mathfrak{p}$ 在 $A_\mathfrak{p}$ 中的扩理想，$\mathfrak{n}$，$\mathfrak{n}'$ 分别是 $\mathfrak{q}$，$\mathfrak{q}'$ 在 $B_\mathfrak{p}$ 中的扩理想. 那么 $\mathfrak{m}$ 是 $A_\mathfrak{p}$ 的极大理想；$\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{n}'$，$\mathfrak{n}^c = \mathfrak{n}'^c = \mathfrak{m}$. 由 (5.8) 得到，$\mathfrak{n}$，$\mathfrak{n}'$ 是极大的，因此，$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}'$. 由(3.11) iv) $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. ■

定理 5.10. 令 $A \subseteq B$ 是环，B 在 A 上整，$\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想. 那么存在 B 的素理想 $\mathfrak{q}$，使得 $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$.

证明. 由(5.6)，$B_\mathfrak{p}$ 在 $A_\mathfrak{p}$ 上整，图表

$$\begin{array}{ccc} A & \rightarrow & B \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ A_\mathfrak{p} & \rightarrow & B_\mathfrak{p} \end{array}$$

（在图中，水平箭头是一一映入）是交换的. 令 $\mathfrak{n}$ 是 $B_\mathfrak{p}$ 的一个极大理想，那么由(5.8)，$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A_\mathfrak{p}$ 是极大的，因此它是局部环 $A_\mathfrak{p}$ 的唯一的极大理想. 如果 $\mathfrak{q} = \beta^{-1}(\mathfrak{n})$，那么 $\mathfrak{q}$ 是素的，我们有 $\mathfrak{q} \cap A = \alpha^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$. ■

定理 5.11. （上升定理）. 令 $A \subseteq B$ 是环，B 在 A 上整，$\mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$ 是 A 的素理想链，$\mathfrak{q} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m$ $(m < n)$ 是 B 的素

理想链,使得 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ ($1 \leqslant i \leqslant m$). 那么链 $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_m$ 可扩充成链 $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$, 使得 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$, 对 $1 \leqslant i \leqslant n$.

证明. 用归纳法,我们立即把定理化到 $m = 1$, $n = 2$ 的情况. 令 $\bar{A} = A/\mathfrak{p}_1$, $\bar{B} = B/\mathfrak{q}_1$; 那么 $\bar{A} \subseteq \bar{B}$, 由 (5.6), $\bar{B}$ 在 $\bar{A}$ 上整. 由 (5.10), 存在 $\bar{B}$ 的素理想 $\bar{\mathfrak{q}}_2$, 使得 $\bar{\mathfrak{q}}_2 \cap \bar{A} = \bar{\mathfrak{p}}_2$, $\bar{\mathfrak{p}}_2$ 是 $\mathfrak{p}_2$ 在 $\bar{A}$ 中的象. 把 $\bar{\mathfrak{q}}_2$ 回到 B, 我们便得到具有所要求性质的素理想 $\mathfrak{q}_2$. ■

整闭整环. 下降 (GOING-DOWN) 定理

命题(5.6)的 ii) 可以加强为:

命题 5.12. 令 $A \subseteq B$ 是环, C 是 A 在 B 中的整闭包. 令 S 是 A 的一个乘法封闭子集. 那么 $S^{-1}C$ 是 $S^{-1}A$ 在 $S^{-1}B$ 中的整闭包.

证明. 由 (5.6), $S^{-1}C$ 在 $S^{-1}A$ 上整. 反之, 如果 $b/s \in S^{-1}B$ 在 $S^{-1}A$ 上整,那么我们有方程

$$(b/s)^n + (a_1/s_1)(b/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s_n = 0,$$

其中 $a_i \in A$, $s_i \in S$ ($1 \leqslant i \leqslant n$), 令 $t = s_1 \cdots s_n$, 用 $(st)^n$ 乘这个方程. 它变成 bt 在 A 上的整相关方程. 因此 $bt \in C$, $b/s = \frac{bt}{st} \in S^{-1}C$. ■

一个整环叫作**整闭的**(没有限制条件), 如果它在它的分式域中是整闭的. 例如, $\mathbf{Z}$ 是整闭的(见(5.0)). 同样的讨论指出,任何唯一因子分解整环都是整闭的. 特别,域上的多项式环 $k[x_1, \cdots, x_n]$ 是整闭的.

整闭性是局部性质:

命题 5.13. 令 A 是一个整环. 那么下列断言是等价的:

i) A 是整闭的;

ii) 对每个素理想 $\mathfrak{p}$. $A_\mathfrak{p}$ 是整闭的;

iii) 对每个极大理想 $\mathfrak{m}$, $A_\mathfrak{m}$ 是整闭的.

证明． 令K是A的分式域，C是A在K中的整闭包，令 f: $A\to C$ 是A到C之中的恒等映射． 那么A是整闭的$\Longleftrightarrow f$ 是满的，由(5.12) $A_{\mathfrak{p}}$(或者 $A_{\mathfrak{m}}$) 是整闭的 $\Longleftrightarrow f_{\mathfrak{p}}$(或者 $f_{\mathfrak{m}}$) 是满的．再用(3.9)． ■

令 $A\subseteq B$ 是环，$\mathfrak{a}$是A的理想． B的元素叫作**在$\mathfrak{a}$上整的**，如果它满足A上的整相关方程，其系数都在$\mathfrak{a}$中． **$\mathfrak{a}$在B中的整闭包**是B中所有在$\mathfrak{a}$上整的元素的集合．

引理 5.14. 令C是A在B中的整闭包，$\mathfrak{a}^e$表示$\mathfrak{a}$在C中的扩理想．那么$\mathfrak{a}$在B中的整闭包是$\mathfrak{a}^e$的根(因此在加法和乘法之下是封闭的)．

证明． 如果 $x\in B$ 在$\mathfrak{a}$上整，我们有方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 在$\mathfrak{a}$中． 因此 $x\in C$，$x^n\in\mathfrak{a}^e$，于是 $x\in r(\mathfrak{a}^e)$．反之，如果 $x\in r(\mathfrak{a}^e)$，那么 $x^n=\Sigma a_ix_i$ 对某个 $n>0$，其中 a_i 是$\mathfrak{a}$的元素．x_i是C的元素．由于每个 x_i 在A上整，由(5.2)得出 $M=A[x_1,\cdots,x_n]$ 是有限生成A-模和 $x^nM\subseteq\mathfrak{a}M$． 由(2.4)(取$\phi$为将$M$的元素乘以 x^n 的映射)我们看到 x^n 在$\mathfrak{a}$上整，因此x在$\mathfrak{a}$上整． ■

命题 5.15. 令 $A\subseteq B$ 是整环，A是整闭的，$x\in B$ 在A的理想$\mathfrak{a}$上整． 那么x在A的分式域K上代数，而且如果x在K上的极小多项式是 $t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$，那么 $a_1,\cdots,a_n$ 位于 $r(\mathfrak{a})$ 中．

证明． 显然x在K上是代数的．令L是K的扩域，使得它包含x的所有共轭元 $x_1,\cdots,x_n$． 每个x_i满足同一个x的整相关方程，因此每个x_i在$\mathfrak{a}$上整． x在K上的极小多项式的系数是 x_i 的多项式，由(5.14)它们在$\mathfrak{a}$上整． 又由于A是整闭的，再由(5.14)，它们必须位于 $r(\mathfrak{a})$ 中． ■

定理 5.16. ("下降定理")． 令 $A\subseteq B$ 是整环，A是整闭，B在A上整．令 $\mathfrak{p}_1\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{p}_n$ 是A的素理想链． $\mathfrak{q}_1\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{q}_m$ $(m<n)$ 是B的素理想链，使得 $\mathfrak{q}_i\cap A=\mathfrak{p}_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$．那么

链 $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_m$ 可以扩充为链 $\mathfrak{q}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}_n$，使得 $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

证明. 和 (5.11) 一样，我们可以把定理化归 $m = 1, n = 2$ 的情况. 我们只要指出，$\mathfrak{p}_2$ 是环 $B_{\mathfrak{q}_1}$ 中的一个素理想的局限，或等价地 (3.16)，$B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$.

每个 $x \in B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2$ 具有形式 y/s，其中 $y \in B\mathfrak{p}_2$ 而 $s \in B \backslash \mathfrak{q}_1$. 由 (5.14) y 在 $\mathfrak{p}_2$ 上整，由 (5.15) y 在 A 的分式域 K 上的极小多项式具有形式

$$y^r + u_1 y^{r-1} + \cdots + u_r = 0, \tag{1}$$

其中 $u_1, \cdots, u_r$ 在 $\mathfrak{p}_2$ 中.

现在假设 $x \in B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2 \cap A$. 那么 $s = yx^{-1}$，$x^{-1} \in K$，将 (1) 除以 x^r，就得到 s 在 K 上的极小多项式，设它是

$$s^r + v_1 s^{r-1} + \cdots + v_r = 0, \tag{2}$$

其中 $v_i = u_i/x^i$. 从而

$$x^i v_i = u_i \in \mathfrak{p}_2 \qquad (1 \leqslant i \leqslant r). \tag{3}$$

但是 s 在 A 上整，因此由 (5.15) $(\mathfrak{a} = (1))$，每个 v_i 在 A 中. 假设 $x \notin \mathfrak{p}_2$，那么 (3) 指出，每个 $v_i \in \mathfrak{p}_2$，于是 (2) 指出 $s^r \in B\mathfrak{p}_2 \subseteq B\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{q}_1$，因此 $s \in \mathfrak{q}_1$，这是一个矛盾. 所以 $x \in \mathfrak{p}_2$，$B_{\mathfrak{q}_1}\mathfrak{p}_2 \cap A = \mathfrak{p}_2$，正是所需要的. ■

下面命题的证明假定了域论的某些标准事实.

命题 5.17. 令 A 是一个整闭的整环，K 是它的分式域，L 是 K 的一个有限可分代数扩张，B 是 A 在 L 中的整闭包. 那么存在 L 在 K 上的基 $v_1, \cdots, v_n$，使得 $B \subseteq \sum_{j=1}^{n} A v_j$.

证明. 如果 v 是 L 的任何元素，那么 v 是 K 上的代数元，因而满足方程

$$a_0 v^r + a_1 v^{r-1} + \cdots + a_r = 0 \quad (a_i \in A).$$

用 a_0^{r-1} 乘这个方程，我们看到 $a_0 v$ 在 A 上整，因此 $a_0 v \in B$. 于是，给出 L 在 K 上的任何基，我们可用 A 的适当的元素乘基元素得到基 $u_1, \cdots, u_n$，使得 $u_i \in B$.

令T表示(从L到K的)迹. 由于L/K是可分的，L(看作K上的向量空间) 上的双线性型 $(x, y)\longmapsto T(x, y)$ 是非退化的，因此我们有L在K上的对偶基$v_1,\cdots, v_n$，它们由$T(u_i, v_j)=\delta_{ij}$定义. 令 $x\in B$，表成 $x=\sum_j x_jv_j$ $(x_j\in K)$. 我们有 $xu_i\in B$ (由于 $u_i\in B$)，由(5.15) $T(xu_i)\in A$ (因为元素的迹是它的极小多项式中一个系数的倍元). 但是 $T(xu_i)=\sum_j T(x_ju_iv_j)=\sum_j x_j T(u_iv_j)=\Sigma x_j\delta_{ij}=x_i$，因此 $x_i\in A$. 从而 $B\subseteq\sum_j Av_j$. ■

赋　　值　　环

令B是一个整环，K是它的分式域. B叫做K的一个**赋值环**，如果对每个 $x\neq 0$，或者 $x\in B$ 或者 $x^{-1}\in B$ (或两者都有).

命题 5.18. i) B是局部环.

ii) 如果 B' 是环，使得$B\subseteq B'\subseteq K$，那么 B' 是K的一个赋值环.

iii) B是整闭的(在K中).

证明. i) 令$\mathfrak{m}$是B的不可逆元的集合，$x\in\mathfrak{m}\Longleftrightarrow$或者$x=0$或者 $x^{-1}\notin B$. 如果 $a\in B$，$x\in\mathfrak{m}$，我们有 $ax\in\mathfrak{m}$. 否则，$(ax)^{-1}\in B$，$x^{-1}=a\cdot(ax)^{-1}\in B$. 下面令 x, y 是$\mathfrak{m}$的非零元，那么或者 $xy^{-1}\in B$ 或者 $x^{-1}y\in B$. 如果 $xy^{-1}\in B$，则 $x+y=(1+xy^{-1})y\in B\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}$. 对于 $x^{-1}y\in B$，情况是类似的. 因此$\mathfrak{m}$是一个理想，由(1.6)B是局部环.

ii) 由定义显而易见.

iii) 令 $x\in K$ 在B上是整的. 那么我们有

$$x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0,$$

其中 $b_i\in B$. 如果 $x\in B$，没有什么要证的了. 如果 $x\notin B$，则 $x^{-1}\in B$，$x=-(b_1+b_2x^{-1}+\cdots+b_nx^{1-n})\in B$. ■

令K是一个域，Ω是一个代数闭域. 令Σ是所有对(A,f)的

集合，其中A是K的一个子环，f是A到Ω之中的一个同态．Σ按下列方式构成偏序集：

$$(A, f) \leqslant (A', f') \Longleftrightarrow A \subseteq A', \text{且} f'|_A = f.$$

Zorn 引理的条件显然满足，因此集合Σ至少有一个极大元。

令(B, g)是Σ的一个极大元．我们想要证明B是K的赋值环．证明的第一步是

引理 5.19. B是一个局部环，$\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(g)$是它的极大理想．

证明．由于$g(B)$是域的子环，因此是整环，理想$\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(g)$是素的．我们把$g$扩张为同态$\bar{g}: B_{\mathfrak{m}} \to \Omega$，只要令$\bar{g}(b/s) = \dfrac{g(b)}{g(s)}$，对所有$b \in B$和所有$s \in B\backslash\mathfrak{m}$，因为$g(s) \neq 0$，这是合理的．由于对$(B, g)$是极大的，得到$B = B_{\mathfrak{m}}$．于是$B$是局部环，$\mathfrak{m}$是它的极大理想． ■

引理 5.20. 令x是K的一个非零元．$B[x]$是由x在B上所生成的，K的子环，$\mathfrak{m}[x]$是$\mathfrak{m}$在$B[x]$中的扩理想．那么或者$\mathfrak{m}[x] \neq B[x]$或者$\mathfrak{m}[x^{-1}] \neq B[x^{-1}]$．

证明．假设$\mathfrak{m}[x] = B[x]$，$\mathfrak{m}[x^{-1}] = B[x^{-1}]$．那么我们有方程

$$u_0 + u_1 x + \cdots + u_m x^m = 1 \quad (u_i \in \mathfrak{m}), \tag{1}$$

$$v_0 + v_1 x + \cdots + v_n x^{-n} = 1 \quad (v_j \in \mathfrak{m}), \tag{2}$$

其中可假设次数m, n尽可能地小．假设$m \geqslant n$，用x^n乘(2)：

$$(1 - v_0) x^n = v_1 x^{n-1} + \cdots + v_n. \tag{3}$$

由于$v_0 \in \mathfrak{m}$，由(5.19)得到，$(1 - v_0)$在B中是可逆元，(3)可写成：

$$x^n = w_1 x^{n-1} + \cdots + w_n \quad (w_j \in \mathfrak{m}).$$

在(1)中用$w_1 x^{m-1} + \cdots + w_n x^{m-n}$代替$x^m$，这与$m$的极小性矛盾． ■

定理 5.21. 令(B, g)是Σ的一个极大元．那么B是域K的一个赋值环．

证明．我们只需指出，如果$x \neq 0$是K的元素，那么或者

$x \in B$ 或者 $x^{-1} \in B$. 由(5.20)我们可假设 $\mathfrak{m}[x]$ 不是环 $B' = B[x]$ 的单位理想. 那么 $\mathfrak{m}[x]$ 包含在 B' 的一个极大理想 $\mathfrak{m}'$ 之中，我们有 $\mathfrak{m}' \cap B = \mathfrak{m}$ (因为 $\mathfrak{m}' \cap B$ 是 B 的真理想且包有 $\mathfrak{m}$). 因此 B 在 B' 中的嵌入诱导出域 $k = B/\mathfrak{m}$ 在域 $k' = B'/\mathfrak{m}'$ 中的嵌入，$k' = k[\bar{x}]$，其中 $\bar{x}$ 是 x 在 k' 中的象，因此 $\bar{x}$ 在 k 上是代数的，k' 是 k 的有限代数扩张.

由(5.19)，$\mathfrak{m}$ 是 g 的核，所以同态 g 诱导出 k 在 Ω 中的嵌入 $\bar{g}$. 由于 Ω 是代数闭的，$\bar{g}$ 可扩张成 k' 到 Ω 中的嵌入 $\bar{g}'$. 作 $\bar{g}'$ 和自然同态 $B' \to k'$ 合成映射，我们有 g 的扩张 g': $B' \to \Omega$. 由于对 (B, g) 是极大的，得到 $B' = B$，因此 $x \in B$. ■

系理 5.22. 令 A 是域 K 的一个子环. 那么 A 在 K 中的整闭包 $\bar{A}$ 是 K 的包含 A 的所有赋值环的交.

证明. 令 B 是 K 的赋值环，且使得 $A \subseteq B$. 由 (5.18) iii)，B 是整闭的，得到 $\bar{A} \subseteq B$.

反之，令 $x \notin \bar{A}$. 那么 x 不在环 $A' = A[x^{-1}]$ 中. 因此 x^{-1} 在 A' 中是不可逆元，它包含在 A' 的极大理想 $\mathfrak{m}'$ 中. 令 Ω 是域 $k' = A'/\mathfrak{m}'$ 的代数闭包. 那么自然同态 $A' \to k'$ 对 A 的限制确定了 A 到 Ω 中的一个同态. 由(5.21)，它可以扩充到某个赋值环 $B \supseteq A$ 上. 因为 x^{-1} 映到零，得到 $x \notin B$. ■

命题 5.23. 令 $A \subseteq B$ 是整环，B 在 A 上有限生成. v 是 B 的非零元素. 那么在 A 中存在 $u \neq 0$，具有下面的性质：A 到代数闭域 Ω 中的任何使得 $f(u) \neq 0$ 的同态 f 都可以扩充为 B 到 Ω 中的同态 g，使得 $g(v) \neq 0$.

证明. 对 B 在 A 上的生成元的个数用归纳法，我们马上可以化为 B 在 A 上由一个元素 x 生成的情况.

i) 假设 x 在 A 上是超越的，即没有系数在 A 中的非零多项式以 x 为根. 令 $v = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$，取 $u = a_0$. 那么，如果 f: $A \to \Omega$ 是使得 $f(u) \neq 0$，由于 Ω 是无限的，存在 $\xi \in \Omega$，使得 $f(a_0)\xi^n + f(a_1)\xi^{n-1} + \cdots + f(a_n) \neq 0$. 定义 $g: B \to \Omega$，它是 f 的扩充且令 $g(x) = \xi$. 那么 $g(v) \neq 0$，正如所要求

的.

ii) 现在假设 x 在 A 上是代数的(即在 A 的分式域上). 因为 v 是 x 的多项式,所以 v^{-1} 在 A 上是代数的. 因此我们有方程

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m = 0 \quad (a_i \in A), \tag{1}$$

$$a_0'v^{-n} + a_1'v^{1-n} + \cdots + a_n' = 0 \quad (a_j' \in A). \tag{2}$$

令 $u = a_0a_0'$, f: $A \to \Omega$ 使得 $f(u) \neq 0$. 那么 f 首先可扩充成同态 f_1: $A[u^{-1}] \to \Omega$ ($f_1(u^{-1}) = f(u)^{-1}$), 然后由 (5.21) 可扩充成同态 h: $C \to \Omega$, 这里 C 是包有 $A[u^{-1}]$ 的一个赋值环. 由 (1), x 在 $A[u^{-1}]$ 上整. 由 (5.22), $x \in C$, 所以 C 包有 B,特别 $v \in C$. 另一方面, 由 (2), v^{-1} 在 $A[u^{-1}]$ 上整, 由 (5.22) 它在 C 中. 因此 v 是 C 中的可逆元, $h(v) \neq 0$. 现在取 g 是 h 对 B 的限制即可. ■

系理 5.24. 令 k 是域, B 是一个有限生成的 k- 代数. 如果 B 是域,那么它是 k 的有限代数扩张.

证明. 取 $A = k$, $v = 1$, $\Omega = k$ 的代数闭包. ■

(5.24) 是 Hilbert **零点定理**的一个形式. 另一个证明见 (7.9).

习　　题

1. 设 f: $A \to B$ 是环的整同态. 求证 f^*: Spec $(B) \to$ Spec (A) 是闭映射, 即 f^* 将闭集映成闭集. (这是定理 (5.10) 的等价的几何说法.)
2. 设 A 是环 B 的子环, B 在 A 上整, 又设 f: $A \to \Omega$ 是 A 到代数闭域 Ω 中的一个同态. 求证 f 可以扩充为 B 到 Ω 之中的同态. [利用(5.10).]
3. 设 f: $B \to B'$ 是一个 A-代数同态,设 C 是一个 A-代数. 证明,如果 f 整,那么 $f \otimes 1$: $B \otimes_A C \to B' \otimes_A C$ 也整. (这包含了 (5.6) ii) 作为其特殊情况.)
4. 设 A 是环 B 的子环, 且 B 在 A 上整. 设 $\mathfrak{n}$ 是 B 中一个极大理

想，$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}\cap A$是$A$中相应的极大理想，问环$B_{\mathfrak{n}}$在$A_{\mathfrak{m}}$上是否一定整？

[考虑 $k[x]$ 中的子环 $k[x^2-1]$，这里k是域，令$\mathfrak{n}=(x-1)$. 元素 $1/(x+1)$ 能否是整元?]

5. 设 $A\subseteq B$ 都是环，B在A上整。

   i）如果 $x\in A$ 是B中可逆元，那么必是A中可逆元。

   ii）A的大根是B的大根的局限。

6. 设 $B_1,\cdots,B_n$ 是整的A–代数. 求证 $\prod_{i=1}^{n}B_i$ 也是整的A–代数。

7. 设A是环B的子环，且集合 $B\backslash A$ 对乘法封闭，求证A在B中整闭.

8. i）设A是整环B的子环，C是A在B中的整闭包. 设f, g是$B[x]$中的首项系数为1的多项式，使得$fg\in C[x]$. 那么f, g都在 $C[x]$ 内. [取一个包含B的域，使f, g在其中分解为线性因子，设 $f=\Pi(x-\xi_i)$，$g=\Pi(x-\eta_j)$. 每个ξ_i和η_j都是fg的根，因此在C上整. 因此f, g的系数在C上整.]

   ii）不假设B（或A）是整环，证明有同样的结果.

9. 设A是环B的子环，C是A在B中的整闭包. 证明，$C[x]$是$A[x]$在$B[x]$中的整闭包. [如果 $f\in B[x]$ 在 $A[x]$ 上整，那么

$$f^m+g_1f^{m-1}+\cdots+g_m=0\quad(g_i\in A[x]).$$

设r是大于m和 $g_1,\cdots,g_m$ 的次数的一个整数，令 $f_1=f-x^r$. 那么

$$(f_1+x^r)^m+g_1(f+x^r)^{m-1}+\cdots+g_m=0,$$

或者说

$$f_1^m+h_1f_1^{m-1}+\cdots+h_m=0,$$

其中 $h_m=(x^r)^m+g_1(x^r)^{m-1}+\cdots+g_m\in A[x]$. 再把习题8的结果应用到多项式 $-f_1$ 与 $f_1^{m-1}+h_1f_1^{m-2}+\cdots+h_{m-1}$ 上.]

10. 环同态 f: $A\to B$ 称为具有上升性质 (going-up property)(相

应地，下降性质（going-down property)），是指如果上升定理(5.11)的结论(相应地，下降定理(5.16)的结论)对B和它的子环$f(A)$成立.

设f^*: Spec$(B)\to$Spec(A)是与f相伴的映射.

i) 考虑下列三个论断:

(a) f^*是闭映射.

(b) f具有上升性质.

(c) 设$\mathfrak{q}$是B中任一素理想，且$\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^c$. 那么映射$f^*$: Spec$(B/\mathfrak{q})\to$Spec$(A/\mathfrak{p})$是满的.

求证: (a)$\Longrightarrow$(b)$\Longleftrightarrow$(c). (参看第六章,习题11.)

ii) 考虑下列三个论断:

(a′) f^*是开映射.

(b′) f具有下降性质.

(c′) 对于B中任一素理想$\mathfrak{q}$，如果$\mathfrak{p}=\mathfrak{q}^c$. 那么映射$f^*$: Spec$(B_\mathfrak{q})\to$Spec$(A_\mathfrak{p})$是满的.

求证: (a′)$\Longrightarrow$(c′)$\Longrightarrow$(b′).*) (参看第七章，习题23.)

[为了证明(a′)$\Longrightarrow$(c′)，注意$B_\mathfrak{q}$是环B_t, $t\in B\backslash\mathfrak{q}$, 的正向极限，因此，由第三章习题26，我们有$f^*(\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{q}))=\bigcap_t f^*(\mathrm{Spec}(B_t))=\bigcap_t f^*(Y_t)$. 由于$Y_t$是$\mathfrak{q}$在$Y$中的开邻域,而$f^*$是开的,因此$f^*(Y_t)$是$\mathfrak{p}$在$X$中的开邻域，因此包含Spec$(A_\mathfrak{p})$.]

11. 设f: $A\to B$是环的平坦同态. 那么f具有下降性质. [第三章,习题18.]

12. 设G是环A的一个有限自同构群，设A^G是G-不变的元素所形成的子环,即$A^G=\{x\,|\,x\in A,\ \sigma(x)=x$对一切$\sigma\in G\}$. 证明$A$在$A^G$上整. [对于$x\in A$，注意$x$是多项式$\prod_{\sigma\in G}(t-\sigma(x))$的根.]

---

*) 原书误为(b′)$\Longleftrightarrow$(c′).——译者注

设 S 是 A 的乘法封闭子集，且 $\sigma(S) \subseteq S$ 对一切 $\sigma \in G$，令 $S^G = S \cap A^G$. 证明 G 在 A 上的作用可以扩充到 $S^{-1}A$ 上，且 $(S^G)^{-1}A^G \cong (S^{-1}A)^G$.

13. 在习题 12 的情况下，设 $\mathfrak{p}$ 是 A^G 的一个素理想，P 是 A 中那些其局限是 $\mathfrak{p}$ 的素理想的集合. 证明 G 可迁地作用在 P 之上. 特别，集合 P 有限.

[设 $\mathfrak{p}_1$，$\mathfrak{p}_2 \in P$，$x \in \mathfrak{p}_1$，那么 $\prod_{\sigma} \sigma(x) \in \mathfrak{p}_1 \cap A^G = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_2$，因此 $\sigma(x) \in \mathfrak{p}_2$，对某个 $\sigma \in G$. 由此推出，$\mathfrak{p}_1$ 包含在 $\bigcup_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{p}_2)$ 之中，然后运用 (1.11) 和 (5.9).]

14. 设 A 是整闭的整环，K 是它的分式域，L 是域 K 的有限正规可分扩张. 设 G 是 L 在 K 上的 Galois 群，设 B 是 A 在 L 中的整闭包. 证明，$\sigma(B) = B$ 对一切 $\sigma \in G$，且 $A = B^G$.

15. 设 A，K 如习题 14，L 是 K 的任一有限扩域，B 是 A 在 L 中的整闭包. 证明，如果 $\mathfrak{p}$ 是 A 的任一素理想，那么 B 中那些其局限是 $\mathfrak{p}$ 的素理想 $\mathfrak{q}$ 的集合是有限集（换言之，Spec $(B) \to$ Spec (A) 具有有限个纤维）.

[分两种情形考虑：a) L 在 K 上可分；b) L 在 K 上纯不可分. 在情形 a)，把 L 嵌到 K 的一个有限正规可分扩域中，并利用习题 13，14. 对情形 b)，如果 $\mathfrak{q}$ 是 B 中素理想，使得 $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$，那么证明 $\mathfrak{q} = \{x \mid x \in B$，存在 $m \geqslant 0$ 使 $x^{p^m} \in \mathfrak{p}$，而 p 是域 K 的特征$\}$. 因此，这时映射 Spec $(B) \to$ Spec (A) 是一一的.]

Noether 正规化引理

16. 设 k 是域，$A \neq 0$ 是有限生成 k-代数. 那么存在元素 $y_1, \cdots, y_r \in A$，它们在 k 上代数无关，使得 A 在 $k[y_1, \cdots, y_r]$ 上整.

我们将假设域 k 无限.（对有限域 k 结论也对，但需要另外证明.）设 $x_1, \cdots, x_n$ 生成作为 k-代数的 A. 元素 x_i 可以重新排列，使 $x_1, \cdots, x_r$ 在 k 上代数无关，而 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 中

每一个在 $k[x_1,\cdots,x_r]$ 上是代数的. 然后对 n 作归纳. 如果 $n=r$, 无须证明. 设 $n>r$, 并假设结果对 $n-1$ 个生成元成立. 生成元 x_n 在 $k[x_1,\cdots,x_{n-1}]$ 上是代数的, 所以有 n 个变元的多项式 $f\neq 0$, 使 $f(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)=0$. 设 F 是这个多项式的最高次的齐次部分. 由于域 k 无限, 存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in k$, 使 $F(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1},1)\neq 0$ 令 $x_i'=x_i-\lambda_i x_n$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$. 证明 x_n 在环 $A'=k'[x_1',\cdots,x_{n-1}']$ 上整, 因此 A 在 A' 上整. 然后把归纳假设运用到 A' 上就完成了证明.

从证明得出, $y_1,\cdots,y_r$ 可选作 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合. 这有如下的几何解释: 设 k 代数闭, X 是 k^n 中的仿射代数簇, 其坐标环 $A\neq 0$, 那么在 k^n 中有 r 维线性子空间 L 及 k^n 到 L 上的线性映射, 它将 X 映到 L 上. [利用习题 2.]

零点定理(弱形式)

17. 设 X 是 k^n 中的仿射代数簇, k 是代数闭域, 又设 $I(X)$ 是多项式环 $k[t_1,\cdots,t_n]$ 中 X 的理想(见第一章, 习题 27). 如果 $I(X)\neq(1)$, 那么 X 非空. [设 $A=k[t_1,\cdots,t_n]/I(X)$ 是 X 的坐标环. 那么 $A\neq 0$. 因此, 由习题 16, 在 k^n 中存在维数 $\geqslant 0$ 的线性空间 L, 及 X 到 L 之上的映射. 所以 $X\neq\varnothing$.]

    由此推出, 在环 $k[t_1,\cdots,t_n]$ 中的任一极大理想都有形状 $(t_1-a_1,\cdots,t_n-a_n)$, 其中 $a_i\in k$.

18. 设 k 是域、B 是有限生成 k-代数, 假定 B 是域. 那么 B 是 k 的有限代数扩域. (这是 Hilbert 零点定理的另一种说法, 下面的证明属于 Zariski, 其它的证明见 (5.24) 与 (7.9).)

    设 $x_1,\cdots,x_n$ 生成作为 k-代数的 B. 对 n 用归纳法证明. 如果 $n=1$, 结论是显然的. 设 $n>1$, $A=k[x_1]$, $K=k(x_1)$ 是 A 的分式域. 由归纳假设, B 是 K 的有限代数扩域. 因此, $x_2,\cdots,x_n$ 中的每一个元适合一个系数在 K 中(即系数皆形如 a/b, $a,b\in A$) 且首项系数为 1 的多项式. 用 f

表示所有这些系数的分母的乘积. 那么 $x_2, \cdots, x_n$ 在 A_f 上整. 所以 B 在 A_f 上整,因此,K 也在 A_f 上整.

假设 x_1 在 k 上是超越的. 那么 A 整闭,因为它是唯一因子分解整环. 因此,A_f 整闭(5.12),由此有 $A_f = K$, 显然这不可能,所以 x_1 在 k 上是代数的,所以 K (因此 B)是 k 的有限扩张.

19. 从习题 18 推出习题 17 的结果.

20. 设 A 是整环 B 的子环,且 B 在 A 上有限生成. 证明 A 中存在元素 $s \neq 0$, B 中存在元素 $y_1, \cdots, y_n$, 它们在 A 上代数无关,使得 B_s 在 B'_s 上整, 其中 $B' = A[y_1, \cdots, y_n]$. [设 $S = A \setminus \{0\}$, 令 $K = S^{-1}A$ 是 A 的分式域. 那么 $S^{-1}B$ 是有限生成 K-代数,因此由正规化引理(习题 16),在 $S^{-1}B$ 中存在 $x_1, \cdots, x_n$, 它们在 K 上代数无关,且 $S^{-1}B$ 在 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 上整. 设 $z_1, \cdots, z_m$ 生成作为 A-代数的 B, 那么任一元 z_j (看作 $S^{-1}B$ 中元)在 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 上整. 对每个 z_j, 写出一个整相关方程,证明存在 $s \in S$, 使 $x_i = y_i/s$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 其中 $y_i \in B$, 且所有 sz_j 皆在 B' 上整. 由此推出,这个 s 适合所说的条件.]

21. 设 A, B 同习题 20. 证明 A 中存在如下性质的非零元 s: 如果 Ω 是代数闭域, f: $A \to \Omega$ 是同态, $f(s) \neq 0$, 那么 f 可扩充为同态 $B \to \Omega$. [用习题 20 的记号, f 首先可扩充到 B' 上,例如,将一切 y_i 映为0;然后再扩充到 B'_s 上(因为 $f(s) \neq 0$), 最后,扩充到 B_s 上(利用习题 2,因为 B_s 在 B'_s 上整).]

22. 设 A, B 仍同习题 20. 如果环 A 的大根为 0, 那么 B 的大根也为 0.

[设 $v \neq 0$ 是 B 中一个元素,我们要证明 B 中有一个不含 v 的极大理想. 把习题 21 应用到环 B_v 及它的子环 A 上,我们得到 A 中的一个元素 $s \neq 0$. 设 $\mathfrak{m}$ 是 A 中不含 s 的一个极大理想,并设 $k = A/\mathfrak{m}$. 那么自然映射 $A \to k$ 扩充为环 B_v 到域 k 的代数闭包 Ω 中的同态. 证明 $g(v) \neq 0$, 且

$\mathrm{Ker}(g)\cap B$ 是环 B 的一个极大理想.]

23. 设 A 是环. 证明下述条件等价:

    i) A 中每个素理想都是极大理想的交.

    ii) A 的每个同态象的小根等于大根.

    iii) A 的每个非极大的素理想等于真包含它的那些素理想的交.

    [较难的部分仅是 iii) $\Longrightarrow$ ii). 设 ii) 不成立. 那么存在一个素理想,它不是极大理想的交. 过渡到商环,可以假设 A 是具有非零大根 $\mathfrak{R}$ 的整环. 设 f 是 $\mathfrak{R}$ 中某个非零元. 那么 $A_f\neq 0$. 所以 A_f 有一个极大理想,它在 A 中的局限是不含 f 的素理想 $\mathfrak{p}$, 且 $\mathfrak{p}$ 是在不含 f 的素理想中的极大的. 那么 $\mathfrak{p}$ 不极大,并且不等于真包含 $\mathfrak{p}$ 的素理想的交.]

    满足上述三个等价条件的环称作一个 Jacobson 环.

24. 设 A 是一个 Jacobson 环 (习题 23), B 是一个 A–代数. 证明在下述两种情况下 B 也是一个 Jacobson 环. i) B 在 A 上整; ii) B 作为 A–代数是有限生成的. [对 ii), 运用习题 22.]

    特别,任一有限生成的环和域上任一有限生成的代数都是 Jacobson 环.

25. 设 A 是环,证明下述条件等价:

    i) A 是 Jacobson 环;

    ii) 任一有限生成的 A–代数 B 若是域,则在 A 上有限.

    [i) $\Longrightarrow$ ii). 归结为 A 是 B 的子环的情形,再利用习题 21. 设 $s\in A$, 取法如习题 21. 那么 A 中有一个不含 s 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 将同态 $A\to A/\mathfrak{m}=k$ 扩充为 B 到 k 的代数闭包中的一个同态 g. 由于 B 是域, g 是单的. 象 $g(B)$ 在 k 上是代数的,因此,是 k 上有限代数扩域.

    ii) $\Longrightarrow$ i). 运用习题 23 的判别法则 iii). 设 $\mathfrak{p}$ 是 A 中非极大的素理想, $B=A/\mathfrak{p}$. 设 f 是 B 中一个非零元. 那么 B_f 是有限生成 A–代数. 如果它是域,那么它在 B 上有限,因此在 B 上整,于是根据 (5.7), B 应该是域. 所以 B_f 不是域,因此在

B_f 中有非零素理想，它在 B 中的局限理想是不含 f 的非零理想 $\mathfrak{p}'$.]

26. 设 X 是拓扑空间. X 的一个子集叫作**局部闭**的，如果它是一个开集与一个闭集的交，或者用等价的说法是，它在它的闭包中是开集.

关于 X 的子集 X_0，下列条件等价：

（1） X 的每个非空局部闭子集都与 X_0 相交；

（2） 对 X 中每个闭集 E，有 $\overline{E \cap X_0} = E$；

（3） X 中全部开集的集合到 X_0 的全部开集的集合上的映射 $U \longmapsto U \cap X_0$ 是一一的. 具有这些条件的子集 X_0 称作在 X 中**充分稠密**（very dense）.

证明，对任何环 A，下列论断等价：

i） A 是 Jacobson 环.

ii） A 的极大理想的集合在 Spec（A）中充分稠密.

iii） Spec（A）中每一由单个点组成的局部闭子集是闭的. [ii）和 iii）是习题 23 中条件 ii）和 iii）的几何形式.]

赋值环和赋值

27. 设 A，B 是两个局部环. 如果 A 是 B 的子环，而且 A 的极大理想 $\mathfrak{m}$ 包含在 B 的极大理想 $\mathfrak{n}$ 之中（或者等价地说，如果 $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$），我们就说 B **优于**（dominate）A. 设 K 是域，Σ 是 K 中全部局部子环构成的集合，按“优于”关系将 Σ 排序. 证明在 Σ 中有极大元，而且 $A \in \Sigma$ 在 Σ 中是极大的，当且仅当 A 是域 K 的赋值环. [运用（5.12）.]

28. 设 A 是整环，K 是它的分式域. 证明下列论断等价：

（1） A 是域 K 的赋值环；

（2） 设 $\mathfrak{a}$、$\mathfrak{b}$ 是 A 中任意两个理想. 那么或者 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$，或者 $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

由此得出，如果 A 是一个赋值环，$\mathfrak{p}$ 是 A 中一个素理想，那么环 $A_{\mathfrak{p}}$ 与 $A/\mathfrak{p}$ 是它们的分式域的赋值环.

29. 设 A 是域 K 的一个赋值环，证明 K 中任意一个包含 A 的子环都是 A 的局部化*).

30. 设 A 是域 K 的赋值环. A 中可逆元所成的群 U 是域 K 的乘法群 K^* 的一个子群.

令 $\Gamma = K^*/U$. 如果 $\xi, \eta \in \Gamma$, 由 $x, y \in K$ 代表. 我们定义 $\xi \geqslant \eta$, 如果 $xy^{-1} \in A$. 证明这在 Γ 上定义了一个全序，且与群的结构相容（即 $\xi \geqslant \eta \Longrightarrow \xi\omega \geqslant \eta\omega$, 对一切 $\omega \in \Gamma$）. 换言之，Γ 是全序 Abel 群. 它称作环 A 的**值群**.

设 $v: K^* \to \Gamma$ 是自然同态. 证明 $v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$ 对一切 $x, y \in K^*$.

31. 反之，设 Γ 是一个全序 Abel 群（运算写作加法），K 是域. **K 的一个在 Γ 中取值的赋值**是一个映射 $v: K^* \to \Gamma$，使得:
 (1) $v(xy) = v(x) + v(y)$,
 (2) $v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$,

对所有 $x, y \in K^*$. 证明 K^* 中使 $v(x) \geqslant 0$ 的元素 x 的全体是域 K 的一个赋值环. 它称作 v 的**赋值环**，Γ 中的子群 $v(K^*)$ 是 v 的**值群**.

因此赋值环的概念与赋值的概念本质上是等价的.

32. 设 Γ 是一个全序 Abel 群. Γ 中子群 Δ 称为在 Γ 中**孤立**，如果只要有 $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, $\alpha \in \Delta$, 就有 $\beta \in \Delta$. 设 A 是域 K 的一个赋值环，以 Γ 为值群（习题 31）. 证明如果 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想，$v(A - \mathfrak{p})$ 是 Γ 中某个孤立子群 Δ 中非负元素的集合. 如此决定的从集合 Spec (A) 到 Γ 的孤立子群所成的集合之中的映射是一一的.

若 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想，赋值环 $A/\mathfrak{p}$ 与 $A_\mathfrak{p}$ 的值群是什么？

33. 设 Γ 是一个全序 Abel 群. 我们来说明如何构造一个域 K 及它的赋值 v，使得 Γ 是它的值群. 设 k 是任意一个域，又设 $A = k[\Gamma]$ 是 Γ 在 k 上的群代数. 按定义，A 作为向量空间由

---

*) 原书误为局部环. ——**译者注**

元素 x_α $(\alpha \in \Gamma)$ 自由地生成，而 $x_\alpha x_\beta = x_{\alpha+\beta}$. 证明 A 是整环.

如果 $u = \lambda_1 x_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n x_{\alpha_n}$ 是 A 中任意一个非零元，其中 $\lambda_i \neq 0$，且 $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$，定义 $v_0(u) = \alpha_1$. 证明映射 $v_0: A\backslash\{0\} \to \Gamma$ 适合习题 31 的条件 (1) 与 (2).

设 K 是 A 的分式域. 说明 v_0 可唯一地扩充为 K 的赋值 v，且 v 的赋值群恰是 Γ.

34. 设 A 是一个赋值环，K 是它的分式域. 设 $f: A \to B$ 是环同态，使得 $f^*: \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ 是闭映射. 那么如果 $g: B \to K$ 是任一 A-代数同态(即，如 $g \circ f$ 是 A 到 K 中的嵌入映射)，则有 $g(B) = A$.

[设 $C = g(B)$; 显然 $C \supseteq A$. 设 $\mathfrak{n}$ 是 C 的一个极大理想. 由于映射 f^* 是闭的，$\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$ 是 A 中极大理想，于是 $A_\mathfrak{m} = A$. 此外还有局部环 $C_\mathfrak{n}$ 优于 $A_\mathfrak{m}$. 故由习题 27 可得 $C_\mathfrak{n} = A$，因此 $C \subseteq A$.]

35. 由习题 1 和 3 可得，如果 $f: A \to B$ 是整同态，C 是任意的 A-代数，那么映射 $(f \otimes 1)^*: \mathrm{Spec}(B \otimes_A C) \to \mathrm{Spec}(C)$ 是闭映射.

反之，假设 $f: A \to B$ 有这个性质，且 B 是整环. 那么 f 是整的. [用 A 在 B 中的象代替 A，就归结为 $A \subseteq B$ 而 f 是单映射的情形. 设 K 是 B 的分式域，A' 是 K 的一个包含 A 的赋值环. 根据 (5.22)，只需检验 A' 包含 B. 依假设，映射 $\mathrm{Spec}(B \otimes_A A') \to \mathrm{Spec}(A')$ 是闭的. 将习题 34 的结果应用到由 $b \otimes a' \longmapsto ba'$ 所定义的同态 $B \otimes_A A' \to K$ 上. 于是对一切 $b \in B$，和一切 $a' \in A'$ 有 $ba' \in A'$; 取 $a' = 1$，就得到我们所要的结果.]

证明：如果 B 是仅有有限个极小素理想的环(例如，如果 B 是 Noether 环)，上述结果仍然成立. [设 $\mathfrak{p}_i$ 是这些极小素理想. 那么每个合成同态 $A \to B \to B/\mathfrak{p}_i$ 是整的，因此 $A \to \Pi(B/\mathfrak{p}_i)$ 也是整的，因此 $A \to B/\mathfrak{n}$ 也整 (这里 $\mathfrak{n}$ 是 B 的小根)，因此最后 $A \to B$ 也是整的.]

第六章 链 条 件

到目前为止，我们考虑的都是相当任意的（具有单位元的）交换环. 然而，为了更进一步的研究和为了得到比较深刻的定理，我们需要加上某些有限性条件. 最方便的途径是采取“链条件”的形式. 它适用于环和模两者. 在这章，我们考虑模的情况. 由于许多讨论具有比较类似的形式，升链和降链之间存在着对称性. 但是，在下面几章我们将看到，在环的情况，对称性便消失了.

令Σ是一个偏序集，具有序关系$\leqslant$（即，$\leqslant$是自反的和传递的，而且如果 $x \leqslant y$ 和 $y \leqslant x$，则 $x = y$）.

命题 6.1. 关于Σ的下列条件是等价的：

i）在Σ中的每个递增序列 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots$是稳定的（即，存在正整数 n，使得 $x_n = x_{n+1} = \cdots$）.

ii）Σ的每个非空子集有一个极大元.

证明. i）$\Longrightarrow$ii）. 如果 ii）不成立，那么存在一个Σ的非空子集 T，它没有极大元，在T中我们可以归纳地构造一个无限的严格递增序列.

ii）$\Longrightarrow$i）. 集合 $(x_m)_{m\geqslant 1}$ 有一个极大元 x_n. ■

如果Σ是模M的子模的集合，序关系由关系 $\subseteq$ 给出，那么 i）称为**升链条件**（简记为 a. c. c.），ii）称为**极大条件**. 满足上面等价条件之一的模 M，为纪念 Emmy Noether，称为 **Noether 模**. 如果Σ的序关系由 $\supseteq$ 给出，那么 i）称为**降链条件**（简记为 d. c. c.），ii）称为**极小条件**. 满足它们的模 M，为纪念 Emil Artin，称为 **Artin 模**.

例. 1） 有限交换群（作为 **Z**-模）满足a. c. c. 和d. c. c.

2）环 **Z**（作为 **Z**-模）满足 a. c. c. 但是不满足 d. c. c. 因为，如果 $a \in \mathbf{Z}$ 且 $a \neq 0$，我们有 $(a) \supset (a^2) \supset \cdots \supset (a^n) \cdots$（严格

包含).

3) 令G是 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 的子群，它由 $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ 中阶是p的幂次的所有元素组成,其中p是一个固定的素数. 那么对每个 $n\geqslant 0$, G 恰有一个 p^n 阶的子群 G_n, 而且 $G_0\subset G_1\subset\cdots\subset G_n\subset\cdots$ (严格包含),因此G不满足 a. c. c.. 另一方面，G的真子群只能是G_n的形式，所以G满足 d.c. c..

4) 形如 m/p^n $(m, n\in\mathbf{Z}, n\geqslant 0)$ 的所有有理数构成的群H不满足 a. c. c.，也不满足 d. c. c.. 因为我们有一个正合序列 $0\to\mathbf{Z}\to H\to G\to 0$，由于 $\mathbf{Z}$ 不满足 d. c. c.，所以H不满足 d. c. c.; 由于G不满足 a. c. c.，所以H不满足 a. c. c..

5) 环 $k[x]$ (k 是域，x 是未定元)满足理想的 a. c. c.，而不满足理想的 d. c. c..

6) 具有无穷多个未定元的多项式环 $k[x_1, x_2,\cdots]$ 关于理想的两个链条件都不满足: 因为序列 $(x_1)\subset(x_1, x_2)\subset\cdots$是严格上升的,序列 $(x_1)\supset(x_1^2)\supset(x_1^3)\cdots$是严格下降的.

7) 在后边我们将看到，满足理想的 d. c. c. 的环必定也满足理想的 a. c. c..(一般说来，这个结论对模是不成立的: 见上边的例 2 和例 3.)

命题 6.2. M是一个 Noether A-模$\Longleftrightarrow M$的每个子模是有限生成的.

证明. $\Longrightarrow$: 令N是M的一个子模，Σ是包含在N中的所有有限生成子模的集合. Σ是非空的 (因为 $0\in\Sigma$)，因此有一个极大元,记为 N_0. 如果 $N_0\neq N$，考虑子模 N_0+Ax，其中 $x\in N$, $x\notin N_0$; 它是有限生成的,而且严格包含 N_0, 于是得到矛盾. 因此 $N=N_0$, N 是有限生成的.

$\Longleftarrow$: 令$M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots$是$M$的子模的升链.那么 $N=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$ 是M的一个子模，因此是有限生成的，譬如说由 $x_1,\cdots,x_r$ 生成. 设 $x_i\in M_{n_i}$，令 $n=\max_{i=1}^{r} n_i$; 那么每个 $x_i\in M_n$, 因此 $M_n=M$，链是稳定的. ■

因为 (6.2)，Noether 模比 Artin 模更重要. Noether 条件恰是为了证明许多定理所需要的适当的有限性条件. 但是，许多基本的性质同样地适用于 Noether 模和 Artin 模.

命题 6.3. 令 $0\to M'\xrightarrow{\alpha}M\xrightarrow{\beta}M''\to 0$ 是 A-模的正合序列. 那么

i) M 是 Noether 模 $\Longleftrightarrow$ M' 和 M'' 是 Noether 模;

ii) M 是 Artin 模 $\Longleftrightarrow$ M' 和 M'' 是 Artin 模.

证明. 我们将证明 i); ii) 的证明是类似的.

$\Longrightarrow$: M' (或 M'') 的子模的一个升链给出 M 中的一个链，因此是稳定的.

$\Longleftarrow$: 令 $(L_n)_{n\geqslant 1}$ 是 M 的子模升链，那么 $(\alpha^{-1}(L_n))$ 是 M' 中的一个链，$(\beta(L_n))$ 是 M'' 中的一个链. 对于足够大的 n，这两个链是稳定的. 由此得出链 (L_n) 是稳定的. ■

系理 6.4. 如果 M_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是 Noether (或 Artin) A-模，那么 $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ 亦然.

证明. 对正合序列

$$0\to M_n\to\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\to\bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i\to 0$$

应用归纳法和 (6.3). ■

环 A 称为 **Noether 环**(或 **Artin 环**)，如果它作为 A-模是 Noether 模 (或 Artin 模)，即，如果它满足**理想**的 a. c. c. (或 d. c. c.).

例. 1) 任何域既是 Artin 环又是 Noether 环; 环 $\mathbf{Z}/(n)$ $(n\neq 0)$ 亦然. 环 $\mathbf{Z}$ 是 Noether 环，但不是 Artin 环((6.2) 之前的例 2).

2) 任何主理想整环是 Noether 环(根据 (6.2)，因为每个理想是有限生成的).

3) 环 $k[x_1, x_2, \cdots]$ 不是 Noether 环(前边例 6). 但它是一个整环，因而有分式域. 因此 Noether 环的子环不一定是 Noether 环.

4）令X是一个紧致的无限 Hausdorff 空间，$C(X)$是X上的实值连续函数环．取X中闭集的严格下降序列 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$，并且令 $\mathfrak{a}_n = \{f \in C(X) \mid f(F_n) = 0\}$ 那么$\mathfrak{a}_n$形成$C(X)$中的理想的严格上升序列，所以$C(X)$不是 Noether 环．

命题 6.5. 令A是 Noether（或 Artin）环，M是有限生成A-模．那么M是 Noether（或 Artin）模．

证明．对某个n，M是A^n的商模，再应用(6.4)和(6.3)，命题即得证． ■

命题 6.6. 令A是 Noether（或 Artin）环，$\mathfrak{a}$是A的一个理想．那么$A/\mathfrak{a}$是 Noether（或 Artin）环．

证明．根据(6.3)，$A/\mathfrak{a}$作为A-模是 Noether（或 Artin）模，因此$A/\mathfrak{a}$作为$A/\mathfrak{a}$-模也是 Noether（或 Artin）模． ■

模M的子模**链**指的是M的子模序列(M_i) $(0 \leqslant i \leqslant n)$，使得

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n = 0 \text{（严格包含）}.$$

链的**长度**是n（"连结"数）．M的**合成列**是一个极大链，即任何其它的子模都不能插入链中：这等于说，每个商模M_{i-1}/M_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$是**单的**(即，除了0和它本身之外没有其它子模)．

命题 6.7. 假设M有一个长度为n的合成列．那么M的每个合成列有长度n，在M中的每个链都能够扩充成一个合成列．

证明．令$l(M)$表示模M的合成列的最小长度(如果M没有合成列，就令$l(M) = \infty$)．

i) $N \subset M \Longrightarrow l(N) < l(M)$．令$(M_i)$是具有极小长度的合成列，考虑$N$的子模$N_i = N \cap M_i$．由于$N_{i-1}/N_i \subseteq M_{i-1}/M_i$且后者是一个单模，我们有$N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$或者$N_{i-1} = N_i$，因此，拿掉重复项，我们得到$N$的一个合成列，所以$l(N) \leqslant l(M)$ 如果$l(N) = l(M) = n$，那么$N_{i-1}/N_i = M_{i-1}/M_i$，对于每个$i = 1, 2, \cdots, n$；因此$M_{n-1} = N_{n-1}$，$M_{n-2} = N_{n-2}$，$\cdots$，最后$M = N$．

ii) 在M中的任何链有长度$\leqslant l(M)$．令$M = M_0 \supset M_1 \cdots$是长度为$k$的一个链．那么根据 i)，我们有$l(M) > l(M_1) > \cdots >$

$l(M_k)=0$，因此 $l(M)\geq k$.

iii）考虑M的任何合成列．如果它有长度 k，那么根据 ii）$k\leq l(M)$；由 $l(M)$ 的定义，$k=l(M)$．因此所有合成列有相同的长度．最后，考虑任何链．如果它的长度是 $l(M)$，根据 ii)，它必须是合成列；如果它的长度 $<l(M)$，那么它不是合成列，因此不是极大链，于是新的项可插入链中，一直到长度达到 $l(M)$ 为止．■

命题 6.8. M有合成列 $\Longleftrightarrow$ M满足两个链条件.

证明．$\Longrightarrow$：在M中的所有链都具有有界长度，因此 a. c. c. 和 d. c. c. 都成立.

$\Longleftarrow$：如下地构造一个M的合成列．根据(6.1)，$M=M_0$满足极大条件，它有一个极大子模 $M_1\subset M_0$．同样地 M_1 有一个极大子模 $M_2\subset M_1$，等等．因此我们得到一个严格下降链 $M_0\supset M_1\cdots$，根据 d. c. c.，它必须是有限的，因此它是 M 的合成列．■

满足 a. c. c. 和 d. c. c. 的模称为**有限长度模**．根据(6.7)，M的所有合成列有相同的长度 $l(M)$，称为**M的长度**．把 Jordan-Hölder 定理用于有限长度模：如果 $(M_i)_{0\leq i\leq n}$ 和 $(M'_i)_{0\leq i\leq n}$ 是 M 的任何二个合成列，那么在商模集合 $(M_{i-1}/M_i)_{1\leq i\leq n}$ 和 $(M'_{i-1}/M'_i)_{1\leq i\leq n}$ 之间存在着一一对应，且对应的商模是同构的．证明与有限群的情形是相同的.

命题 6.9. 长度$l(M)$是在所有有限长度 A-模类上的一个加性函数.

证明．我们需要指出，如果 $0\to M'\xrightarrow{\alpha}M\xrightarrow{\beta}M''\to 0$ 是一个正合序列，那么 $l(M)=l(M')+l(M'')$．取 M' 的任何合成列在 α 之下的像和 M'' 的任何合成列在 β 之下的原像，它们一起给出M的一个合成列，因此命题成立.

考虑域 k 上模，即 k-向量空间这个特殊情形：

命题 6.10. 对于 k-向量空间 V，下面的条件是等价的：

i）有限维数；

ii）有限长度；

iii）a. c. c.；

iv）d. c. c..

而且，如果这些条件满足，则长度 = 维数.

证明. i）$\Longrightarrow$ ii）是初等的；由(6.8)有 ii）$\Longrightarrow$ iii），ii）$\Longrightarrow$ iv）. 剩下要证明 iii）$\Longrightarrow$ i）和 iv）$\Longrightarrow$ i）. 假设 i）不成立，那么存在一个由 V 的线性无关元构成的无限序列 $(x_n)_{n\geq 1}$. 令 U_n（或 V_n）是由 $x_1, \cdots, x_n$（或 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots$）张成的向量空间. 那么链 $(U_n)_{n\geq 1}$（或 $(V_n)_{n\geq 1}$）是无限的且严格上升的（或严格下降的）. ■

系理 6.11. 令 A 是一个环，它的零理想是极大理想的乘积 $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n$（不一定不同）. 那么 A 是 Noether 环当且仅当 A 是 Artin 环.

证明. 考虑理想链 $A \supset \mathfrak{m}_1 \supseteq \mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n = 0$. 每个因子 $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ 是域 $A/\mathfrak{m}_i$ 上的向量空间. 因此，对每个因子，a. c. c. $\Longleftrightarrow$ d. c. c. 重复使用(6.3)可得：对每个因子的 a. c. c.（或 d. c. c.）$\Longleftrightarrow$ 对 A 的 a. c. c.（或 d. c. c.）. 因此对 A，a. c. c. $\Longleftrightarrow$ d. c. c.. ■

习　　题

1. i）设 M 是一个 Noether A-模，$u: M \to M$ 是一个模同态. 如果 u 是满的，那么 u 是同构.

   ii）如果 M 是一个 Artin A-模，而 u 是单的，那么 u 也是同构.

   [为了证明 i），考虑子模 Ker (u^n)，为了证明 ii），考虑商模 Coker (u^n).]

2. 设 M 是 A-模. 如果 M 的有限生成子模构成的任意一个非空集合都有极大元，那么 M 是 Noether 模.

3. 设 M 是 A-模，并设 N_1，N_2 是 M 的子模. 如果 M/N_1，M/N_2 都是 Noether 模，那么 $M/(N_1 \cap N_2)$ 也是 Noether 模. 将上面的

Noether 模改为 Artin 模，也有类似结论.

4. 设M是 Noether A-模，并设 $\mathfrak{a}$ 是M在A中的零化子. 证明 $A/\mathfrak{a}$ 是 Noether 环.

如果在这个结果中用"Artin"模代替"Noether"模，它是否还正确?

5. 拓扑空间X称为 Noether 空间，如果X的开子集满足升链条件(或等价地说，极大条件). 因为闭子集是开子集的补集，上述要求也可叙述为闭子集适合降链条件(或极小条件). 证明，如果X是 Noether 空间，那么X的任一子空间仍是 Noether 空间，而且X是拟紧的.

6. 证明下述条件等价:

i) X是 Noether 空间.

ii) X的任一开子空间是拟紧的.

iii) X的任一子空间是拟紧的.

7. Noether 空间是有限个不可约闭子空间的并. [考虑X的不是有限个不可约闭子空间的并的那些闭子集构成的集合 Σ.] 因此，Noether 空间的不可约分支所构成的集合有限.

8. 如果A是 Noether 环，那么 Spec (A) 是 Noether 拓扑空间. 反之是否正确?

9. 从第 8 题推出，Noether 环中极小素理想的集合是有限的.

10. 如果M是(在任意环A上的) Noether 模，那么 Supp (M) 是 Spec (A) 的闭 Noether 子空间.

11. 设 $f: A \to B$ 是一个环同态，并假设 Spec (B) 是 Noether 空间(见习题 5). 证明映射 f^*: Spec $(B) \to$ Spec (A) 是闭映射当且仅当 f 有上升性质(见第五章，习题 10).

12. 设A是环，且 Spec (A) 是 Noether 空间. 证明A的素理想集合满足升链条件. 逆命题是否成立?

第七章 Noether 环

我们回忆一下，环 A 称为 Noether 环，如果它满足下面的三个等价条件：

1）A 中的每个非空理想集合有一个极大元.

2）A 中的每个理想升链是稳定的.

3）A 中的每个理想是有限生成的.

（这些条件的等价性在(6.1)和(6.2)中已证明.）

在交换代数中，Noether 环是最重要的一类环．在第六章中，我们已经看到了一些例子．在这章，我们将首先指出，Noether 环经过各种常见的运算仍然得到 Noether 环——特别，我们证明著名的 Hilbert 基定理．然后，由 Noether 条件出发，再进行一些重要的推导，其中包括准素分解的存在性.

命题 7.1. 如果 A 是 Noether 环，ϕ 是 A 到环 B 之上的一个同态，那么 B 也是 Noether 环.

证明． 因为 $B \cong A/\mathfrak{a}$，其中 $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}(\phi)$．根据(6.6)，$B$ 是 Noether 环. ■

命题 7.2. 令 A 是 B 的子环，假设 A 是 Noether 环，且 B 作为 A-模是有限生成的．那么 B（作为一个环）是 Noether 环.

证明． 根据(6.5)，B 作为 A-模是 Noether 模，因此作为 B-模也是 Noether 模. ■

例. $B = \mathbf{Z}[i]$ 是 Gauss 整环．根据(7.2)，B 是 Noether 环．更一般地，任何代数整数环都是 Noether 环.

命题 7.3. 如果 A 是 Noether 环，S 是 A 的任何乘法封闭子集，那么 $S^{-1}A$ 是 Noether 环.

证明． 根据(3.11—i))和(1.17—iii))，$S^{-1}A$ 的理想和 A 的局限理想一一对应，且此对应保持序关系，因此 $S^{-1}A$ 的理想满

足极大条件.（另一个证明：如果 $\mathfrak{a}$ 是 A 的任何理想，那么 $\mathfrak{a}$ 有一个有限生成元集合，设为 $x_1, \cdots, x_n$. 显然，$S^{-1}\mathfrak{a}$ 由 $x_1/1, \cdots, x_n/1$ 生成.）■

系理 7.4. 如果 A 是 Noether 环，$\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想，那么 $A_\mathfrak{p}$ 是 Noether 环. ■

定理 7.5.（Hilbert 基定理）. 如果 A 是 Noether 环，那么多项式环 $A[x]$ 是 Noether 环.

证明. 令 $\mathfrak{a}$ 是 $A[x]$ 中的一个理想. 在 $\mathfrak{a}$ 中的多项式的首项系数构成 A 中的一个理想 $\mathfrak{l}$. 由于 A 是 Noether 环，所以 $\mathfrak{l}$ 是有限生成的，譬如说由 $a_1, \cdots, a_n$ 生成. 对于每个 $i = 1, \cdots, n$ 存在一个多项式 $f_i \in A[x]$，$f_i = a_i x^{r_i} +$（低次项）. 令 $r = \max_{i=1}^{n} r_i$，f_i 在 $A[x]$ 中生成一个理想 $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}$.

令 $f = ax^m +$（低次项）是 $\mathfrak{a}$ 的任何一个元素，我们有 $a \in \mathfrak{l}$. 如果 $m \geqslant r$，写出 $a = \sum_{i=1}^{n} u_i a_i$，其中 $u_i \in A$；那么 $f - \Sigma u_i f_i x^{m-r_i}$ 在 $\mathfrak{a}$ 中，而且次数 $< m$. 不断地用这种方法，我们可以从 f 不断地减去 $\mathfrak{a}'$ 的元素，直到得出一个次数 $< n$ 的多项式 g 为止；于是，我们有 $f = g + h$，其中 $h \in \mathfrak{a}'$.

令 M 是由 $1, x, \cdots, x^{r-1}$ 生成的 A-模，那么我们已经证明了 $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap M) + \mathfrak{a}'$，现在 M 是有限生成 A-模，根据 (6.5)，M 是 Noether 模，因此根据 (6.2) $\mathfrak{a} \cap M$（作为 A-模）是有限生成的. 如果 $g_1, \cdots, g_m$ 生成 $\mathfrak{a} \cap M$，显然，f_i 和 g_j 生成 $\mathfrak{a}$. 因此 $\mathfrak{a}$ 是有限生成的. 所以 $A[x]$ 是 Noether 环. ■

注记. 命题"A 是 Noether 环 $\Longrightarrow A[[x]]$ 是 Noether 环"也成立（$A[[x]]$ 是系数在 A 中的 x 的形式幂级数环）. 这命题的证明和 (7.5) 的证明几乎平行，只是要由属于 $\mathfrak{a}$ 的幂级数的**最低次**项出发. 这证明也可见 (10.27).

系数 7.6. 如果 A 是 Noether 环，那么 $A[x_1, \cdots, x_n]$ 也是 Noether 环.

证明. 利用 (7.5)，对 n 施行归纳法. ■

系数 7.7. 令 B 是一个有限生成 A-代数. 如果 A 是 Noether 环,那么 B 也是 Noether 环.

特别,每个有限生成环和域上的每个有限生成代数是 Noether 环.

证明. B 是多项式环 $A[x_1,\cdots,x_n]$ 的同态像,而由(7.6), $A[x_1,\cdots x_n]$ 是 Noether 环. ■

命题 7.8. 令 $A\subseteq B\subseteq C$ 是环. 假设 A 是 Noether 环而 C 作为 A-代数是有限生成的,且 C 或者(i)作为 B-模是有限生成的,或者(ii)在 B 上是整的. 那么 B 作为 A-代数是有限生成的.

证明. 由(5.1)和(5.2)可推出,条件(i)和(ii)在这种情况下是等价的. 所以我们可以集中精力于(i).

令 C 作为 A-代数由 $x_1,\cdots,x_m$ 生成, C 作为 B-模由 $y_1,\cdots,y_n$ 生成. 那么存在表达式

$$x_i=\sum_j b_{ij}y_j \qquad (b_{ij}\in B), \tag{1}$$

$$y_iy_j=\sum_k b_{ijk}y_k \qquad (b_{ijk}\in B). \tag{2}$$

令 B_0 是 A 上的代数,由 b_{ij} 和 b_{ijk} 生成. 由于 A 是 Noether 环,由(7.7), B_0 也是 Noether 环,而且 $A\subseteq B_0\subseteq B$.

C 的任何元素是系数在 A 中的 x_i 的多项式. 将(1)代入并且重复使用(2)可得: C 的每个元素是系数在 B_0 中的 y_i 的线性组合,因此 C 作为 B_0-模是有限生成的. 因为 B_0 是 Noether 环, B 是 C 的子模,所以(由(6.5)和(6.2))推出 B 作为 B_0-模是有限生成的. 由于 B_0 作为 A-代数是有限生成的,于是可得 B 作为 A-代数是有限生成的. ■

命题 7.9. 令 k 是域, E 是有限生成 k-代数. 如果 E 是域,那么它是 k 的有限代数扩张.

证明. 令 $E=k[x_1,\cdots,x_n]$. 如果 E 在 k 上不是代数的,那么我们可以重排 x_i, 使得 $x_1,\cdots,x_r$ 在 k 上是代数无关的,其中 $r\geqslant 1$, $x_{r+1},\cdots,x_n$ 中的每一个在域 $F=k(x_1,\cdots,x_r)$ 上是代数的. 因此 E 是 F 的有限代数扩张, E 作为 F-模是有限生

成的. 对于 $k \subseteq F \subseteq E$ 应用 (7.8),可得 F 是有限生成 k-代数,记 $F = k[y_1, \cdots, y_s]$. 每个 y_j 具有形式 f_j/g_j, 其中 f_j 和 g_j 是 $x_1, \cdots, x_r$ 的多项式.

现在,在环 $k[x_1, \cdots, x_r]$ 中存在无穷多个不可约多项式(采用欧几里得的关于存在无穷多个素数的证明). 因此存在一个与每个 g_j 都互素的不可约多项式 h (例如, $g_1 \cdots g_s + 1$ 的一个不可约因式就是这样一个 h), 于是 F 的元素 h^{-1} 不可能是 y_j 的多项式. 这样得到矛盾. 因此 E 在 k 上是代数的, 于是有 E 是 k 的有限代数扩张. ■

系理 7.10. 令 k 是域, A 是有限生成 k-代数. $\mathfrak{m}$ 是 A 的一个极大理想. 那么,域 $A/\mathfrak{m}$ 是 k 的有限代数扩张. 特别,如果 k 是代数闭的,那么 $A/\mathfrak{m} \cong k$.

证明. 在 (7.9) 中,取 $E = A/\mathfrak{m}$. ■

(7.10)是所谓 Hilbert **零点定理**的"弱"形式. 这里的证明是由 Artin 和 Tate 给出的. 关于它的几何意义和定理的"强"形式,见这章后面的习题.

Noether 环中的准素分解

下边的两个引理指出,在 Noether 环中每个理想 $\neq (1)$ 有一个准素分解.

理想 $\mathfrak{a}$ 叫作**不可约的**,如果

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} \Longrightarrow (\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \text{ 或 } \mathfrak{a} = \mathfrak{c}).$$

引理 7.11. 在 Noether 环 A 中, 每个理想是有限个不可约理想的交.

证明. 假设引理不成立,那么在 A 中的不是有限个不可约理想交的理想集合是非空的,因此有极大元 $\mathfrak{a}$. 由于 $\mathfrak{a}$ 是可约的, 我们有 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ 其中 $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{a}$. 于是 $\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{c}$ 都是有限个不可约理想的交,所以 $\mathfrak{a}$ 也是有限个不可约理想的交,得到矛盾. ■

引理 7.12. 在 Noether 环中,每个不可约理想是准素的.

证明. 过渡到商环，只要证明“如果零理想是不可约的，那么它是准素的”. 令 $xy=0$, $y\neq 0$, 考虑理想链 $\mathrm{Ann}(x)\subseteq \mathrm{Ann}(x^2)\subseteq\cdots$. 根据 a. c. c., 这个链是稳定的，即，对某个 n, 我们有 $\mathrm{Ann}(x^n)=\mathrm{Ann}(x^{n+1})=\cdots$. 由此得出 $(x^n)\cap(y)=0$, 这是因为如果 $a\in(y)$, 则 $ax=0$, 如果 $a\in(x^n)$, 则 $a=bx^n$, 因此 $bx^{n+1}=0$, $b\in\mathrm{Ann}(x^{n+1})=\mathrm{Ann}(x^n)$, 所以 $bx^n=0$, 即 $a=0$. 由于(0)是不可约的和 $(y)\neq 0$, 我们必须有 $x^n=0$. 这证明了(0)是准素的. ■

由这两个引理，我们立刻有

定理 7.13. 在 Noether 环 A 中，每个理想有一个准素分解. ■

因此，第四章的全部结果都适用于 Noether 环.

命题 7.14. 在 Noether 环 A 中，每个理想 $\mathfrak{a}$ 包有它的根的一个幂.

证明. 令 $x_1,\cdots,x_k$ 生成 $r(\mathfrak{a})$: 有 $x_i^{n_i}\in\mathfrak{a}\,(1\leqslant i\leqslant k)$. 令 $m=\sum_{i=1}^{h}(n_i-1)+1$. 那么 $r(\mathfrak{a})^m$ 由积 $x_1^{r_1}\cdots x_k^{r_k}$ 生成，其中 $\Sigma r_i=m$; 由 m 的定义，对至少一个指标 i, 有 $r_i\geqslant n_i$, 因此每个这样的单项式位于 $\mathfrak{a}$ 中，所以 $r(\mathfrak{a})^m\subseteq\mathfrak{a}$. ■

系理 7.15. 在 Noether 环中，小根是幂零的.

证明. 在(7.14)中，取 $\mathfrak{a}=(0)$. ■

系理 7.16. 令 A 是 Noether 环，$\mathfrak{m}$ 是 A 的一个极大理想，$\mathfrak{q}$ 是 A 的任何理想. 那么以下诸断言是等价的:

i) $\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的;

ii) $r(\mathfrak{q})=\mathfrak{m}$;

iii) $\mathfrak{m}^n\subseteq\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{m}$, 对某个 $n>0$.

证明. i) $\Longrightarrow$ ii) 是显然的; ii) $\Longrightarrow$ i): 由(4.2); ii) $\Longrightarrow$ iii): 由 (7.14), iii) $\Longrightarrow$ ii), 利用取根: $\mathfrak{m}=r(\mathfrak{m}^n)\subseteq r(\mathfrak{q})\subseteq r(\mathfrak{m})=\mathfrak{m}$. ■

命题 7.17. 令 $\mathfrak{a}\neq(1)$ 是 Noether 环 A 中的一个理想. 那

么属于 $\mathfrak{a}$ 的素理想恰是在理想集合 $(\mathfrak{a}:x)$ $(x\in A)$ 中出现的素理想.

证明. 过渡到 $A/\mathfrak{a}$, 我们可以假定 $\mathfrak{a}=0$. 令 $\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i=0$ 是零理想的极小准素分解, $\mathfrak{p}_i$ 是 $\mathfrak{q}_i$ 的根. 令 $\mathfrak{a}_i=\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{q}_j\neq 0$. 那么由(4.5)的证明, 对于 $\mathfrak{a}_i$ 中的任何 $x\neq 0$, 我们有 $r(\mathrm{Ann}(x))=\mathfrak{p}_i$, 所以 $\mathrm{Ann}(x)\subseteq\mathfrak{p}_i$.

由于 $\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{p}_i$- 准素的, 由(7.14)知道, 存在一个整数 m, 使得 $\mathfrak{p}_i^m\subseteq\mathfrak{q}_i$, 于是 $\mathfrak{a}_i\mathfrak{p}_i^m\subseteq\mathfrak{a}_i\cap\mathfrak{p}_i^m\subseteq\mathfrak{a}_i\cap\mathfrak{q}_i=0$. 设 $m\geqslant 1$ 是使 $\mathfrak{a}_i\mathfrak{p}_i^m=0$ 的最小整数, 并设 x 是 $\mathfrak{a}_i\mathfrak{p}_i^{m-1}$ 中的一个非零元. 那么 $\mathfrak{p}_i x=0$, 于是对这样的 x, 我们有 $\mathrm{Ann}(x)\supseteq\mathfrak{p}_i$. 因此 $\mathrm{Ann}(x)=\mathfrak{p}_i$.

反之, 如果 $\mathrm{Ann}(x)$ 是一个素理想 $\mathfrak{p}$, 那么 $r(\mathrm{Ann}(x))=\mathfrak{p}$, 因此由(4.5), $\mathfrak{p}$ 是属于 0 的一个素理想. ■

习　　题

1. 设 A 不是 Noether 环, 令 Σ 是 A 中不是有限生成的理想的集合. 证明 Σ 有极大元, 且 Σ 中极大元是素理想.

   [令 $\mathfrak{a}$ 是 Σ 中的一个极大元. 设有 $x, y\in A$ 使 $x\notin\mathfrak{a}$, $y\notin\mathfrak{a}$, $xy\in\mathfrak{a}$. 说明存在有限生成的理想 $\mathfrak{a}_0\subseteq\mathfrak{a}$, 使 $\mathfrak{a}_0+(x)=\mathfrak{a}+(x)$, 且 $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0+x(\mathfrak{a}:x)$. 由于 $(\mathfrak{a}:x)$ 严格包含 $\mathfrak{a}$, 它是有限生成的, 于是 $\mathfrak{a}$ 也是有限生成的.]

   因此, 一个环, 若其中每个素理想都是有限生成的, 它必是 Noether 环 (I. S. Cohen).

2. 设 A 是 Noether 环, 并设 $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\in A[[x]]$. 证明 f 是幂零元, 当且仅当每个 a_n 是幂零元.

3. 设 $\mathfrak{a}$ 是环 A 中的不可约理想, 那么下述论断等价:

   i) $\mathfrak{a}$ 是准素理想;

   ii) 对 A 中每个乘法封闭子集 S, 有 $x\in S$, 使 $(S^{-1}\mathfrak{a})^c=$

$(\mathfrak{a}:x)$.

iii) 对每个 $x\in A$，序列 $(\mathfrak{a}:x^n)$ 是稳定的.

4. 下列哪些环是 Noether 环?

i) 在圆周 $|z|=1$ 上没有极点的 z 的有理函数环.

ii) 具有正的收敛半径的 z 的幂级数环.

iii) 具有无限收敛半径的 z 的幂级数环.

iv) 其前 k 阶微商在原点为零的 z 的多项式全体所成的环（这里 k 是固定整数）.

v) 其对 ω 的偏微商在 $z=0$ 处为零的，变元 z,ω 的多项式的全体所成的环.

在上述所有情况下系数都是复数.

5. 设 A 是 Noether 环，B 是有限生成 A-代数，G 是 B 的一些 A-自同构组成的一个有限群，B^G 是 B 的在 G 中每个元素的作用之下都保持不动的元素的全体所组成的集合. 证明 B^G 是有限生成 A-代数.

6. 如果有限生成的环 K 是域，它必是有限域. [如 K 的特征为零，我们有 $\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subseteq K$. 由于 K 在 $\mathbf{Z}$ 上是有限生成的，它在 $\mathbf{Q}$ 上有限生成. 由 (7.9) 它是有限生成的 $\mathbf{Q}$-模. 用 (7.8) 得到矛盾. 因此 K 的特征 $p>0$，因此，它作为 $\mathbf{Z}/(p)$- 代数是有限生成的. 使用(7.9)可完成证明.]

7. 设 X 是由一族方程 $f_\alpha(t_1,\cdots,t_n)=0$ $(\alpha\in I)$ 给出的一个仿射代数簇(第一章，习题 27). 证明存在 I 的有限子集 I_0，使 X 可由方程 $f_\alpha(t_1,\cdots,t_n)=0$，$\alpha\in I_0$ 给出.

8. 如果 $A[x]$ 是 Noether 环，问 A 是否一定是 Noether 环?

9. 设 A 是环，适合

(1) 对 A 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，局部环 $A_{\mathfrak{m}}$ 是 Noether 环;

(2) 对 A 中每个 $x\neq0$，A 中含 x 的极大理想的集合是有限集.

证明 A 是 Noether 环.

[设 $\mathfrak{a}\neq0$ 是 A 中一个理想. 设 $\mathfrak{m}_1,\cdots,\mathfrak{m}_r$ 是含有 $\mathfrak{a}$ 的

极大理想. 取 $\mathfrak{a}$ 中非零元 x_0, 令 $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_{r+s}$ 是含有 x_0 的极大理想. 由于 $\mathfrak{m}_{r+1}, \cdots, \mathfrak{m}_{r+s}$ 不含 $\mathfrak{a}$, 存在 $x_j \in \mathfrak{a}$ 而 $x_j \notin \mathfrak{m}_{r+j}$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$. 由于每个 $A_{\mathfrak{m}_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 是 Noether 环, $\mathfrak{a}$ 在 $A_{\mathfrak{m}_i}$ 中的扩理想是有限生成的. 因此 $\mathfrak{a}$ 中存在一组元素 $x_{s+1}, \cdots, x_t$, 它们在 $A_{\mathfrak{m}_i}$ 中的象生成 $A_{\mathfrak{m}_i}\mathfrak{a}$, 对 $i = 1, \cdots, r$. 设 $\mathfrak{a}_0 = (x_0, \cdots, x_t)$. 证明对每个极大理想 m, $\mathfrak{a}_0$ 与 $\mathfrak{a}$ 在 $A_\mathfrak{m}$ 中的扩理想相同, 由 (3.9) 推出 $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$.]

10. 设 M 是一个 Noether A-模. 证明 $M[x]$ (第二章, 习题 6)是一个 Noether $A[x]$-模.

11. 设 A 是环, 并设它的每个局部环 $A_\mathfrak{p}$ 是 Noether 环, 问 A 是否一定是 Noether 环?

12. 设 A 是环, B 是忠实平坦 A-代数(见第三章, 习题 16). 如果 B 是 Noether 环, 证明 A 是 Noether 环. (使用升链条件.)

13. 设 $f: A \to B$ 是有限型的环同态, 并设 f^*: Spec(B) $\to$ Spec(A) 是与 f 相伴的映射, 证明 f^* 的纤维是 B 的 Noether 子空间.

零点定理, 强形式

14. 设 k 是代数闭域. 用 A 表示多项式环 $k[t_1, \cdots, t_n]$, 设 $\mathfrak{a}$ 是 A 中的理想. 设 V 是由理想 $\mathfrak{a}$ 定义的 k^n 中的簇: $V = \{(x_1, \cdots, x_n) \in k^n \mid f(x) = 0, \ \forall f \in \mathfrak{a}\}$. 令 $I(V)$ 是 V 的理想, 即 $I(V) = \{g \in A \mid g(x) = 0, \ \forall x \in V\}$. 那么 $I(V) = r(\mathfrak{a})$.

    [显然有 $r(\mathfrak{a}) \subseteq I(V)$. 反之, 如 $f \notin r(\mathfrak{a})$, 那么存在一个含有 $\mathfrak{a}$ 的素理想 $\mathfrak{p}$, 使 $f \notin \mathfrak{p}$. 设 $\bar{f}$ 是 f 在 $B = A/\mathfrak{p}$ 中的象, 设 $C = B_f = B[1/\bar{f}]$, 令 $\mathfrak{m}$ 是 C 的一个极大理想, 由于 C 是有限生成的 k-代数, 由 (7.9) 有 $C/\mathfrak{m} \cong k$. 设 A 的生成元 t_i 在 $C/\mathfrak{m}$ 中的象是 x_i, 这样定义了一个点 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in k^n$, 而这个造法说明了 $x \in V$ 而 $f(x) \neq 0$.]

15. 设 A 是 Noether 局部环, $\mathfrak{m}$ 是它的极大理想, k 是它的同余类域. 设 M 是有限生成 A-模, 那么下述论断等价:

    i) M 自由;

ii) M平坦;

iii) $\mathfrak{m}\otimes M$ 到 $A\otimes M$ 中的映射是单映射;

iv) $\mathrm{Tor}_1^A(k, M)=0$.

[为证明 iv)$\Longrightarrow$i) 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是M中的元素，它们在 $M/\mathfrak{m}M$ 中的象形成这个向量空间的一组 k-基. 由(2.8), x_i 生成 M. 设F是自由 A-模,以 $e_1,\cdots,e_n$ 为基,由 $\phi(e_i)=x_i$ 定义 ϕ: $F\to M$. 设 $E=\mathrm{Ker}(\phi)$. 那么由正合序列 $0\to E\to F\to M\to 0$ 产生一个正合序列

$$0\to k\otimes_A E\to k\otimes_A F\xrightarrow{1\times\phi}k\otimes_A M\to 0.$$

由于 $k\otimes F$ 和 $k\otimes M$ 是 k 上同一维数的向量空间，可知 $1\otimes\phi$ 是同构，因此 $k\otimes E=0$, 故由 Nakayama 引理知 $E=0$ (E 是有限生成的,因为它是F的子模. 而A是 Noether 环).]

16. 设A是 Noether 环,M是有限生成 A-模,那么下述条件等价:

i) M是平坦 A-模;

ii) 对一切素理想 $\mathfrak{p}$, $M_\mathfrak{p}$ 是自由 $A_\mathfrak{p}$ 模;

iii) 对一切极大理想 $\mathfrak{m}$, $A_\mathfrak{m}$ 是自由 $A_\mathfrak{m}$-模.

换言之,平坦=局部自由. (利用习题 15.)

17. 设A是环,M是 Noether A-模. (仿照(7.11)和(7.12)的证明)证明M的每个子模N有准素分解(第四章,习题 20—23).

18. 设A是 Noether 环, $\mathfrak{p}$是A的素理想,M是有限生成 A-模. 证明下述断言等价:

i) 在M中 $\mathfrak{p}$ 属于 0;

ii) 存在 $x\in M$, 使 $\mathrm{Ann}(x)=\mathfrak{p}$;

iii) 存在M的一个子模与 $A/\mathfrak{p}$ 同构.

推出存在子模链

$$0\subset M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_r=M$$

使得每个商模 M_i/M_{i-1} 形如 $A/\mathfrak{p}_i$, 这里 $\mathfrak{p}_i$ 是A的素理想.

19. 设 $\mathfrak{a}$ 是 Noether 环A的理想,

$$\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{r}\mathfrak{b}_i=\bigcap_{j=1}^{s}\mathfrak{c}_j$$

是 $\mathfrak{a}$ 作为不可约理想的交的两个极小分解. 证明 $r=s$ 且(可能在重排 $\mathfrak{c}_j$ 的下标之后) $r(\mathfrak{b}_i)=r(\mathfrak{c}_i)$ 对一切 i.

[证明对每个 $i=1,\cdots,r$ 存在 j 使

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{b}_{i-1}\cap\mathfrak{c}_j\cap\mathfrak{b}_{i+1}\cap\cdots\cap\mathfrak{b}_r.]$$

对模叙述并证明类似的结果.

20. 设 X 是拓扑空间, 设 $\mathscr{F}$ 是具有下述性质的 X 的子集集合中最小者. 这种集合包含一切 X 的开子集, 且相对于作有限交与求补的运算是封闭的.

    i) 证明 X 的子集 $E\in\mathscr{F}$ 当且仅当 E 是形如 $U\cap C$ 的集合的有限并, 这里 U 是开集而 C 是闭集.

    ii) 假设 X 不可约, 又设 $E\in\mathscr{F}$. 证明 E 在 X 中稠密 (即 $\bar{E}=X$) 当且仅当 E 包有 X 中的一个非空开集.

21. 设 X 是 Noether 拓扑空间(第六章, 习题 5)令 $E\subseteq X$. 证明 $E\in\mathscr{F}$ 当且仅当对每个不可约闭集 $X_0\subset X$, 或者 $\overline{E\cap X_0}\neq X_0$, 或者 $E\cap X_0$ 包有 X_0 的一个非空开子集. [假设 $E\notin\mathscr{F}$. 那么使得 $E\cap X'\notin\mathscr{F}$ 的 X 的闭集 X' 构成的集合不空, 因此有一极小元 X_0. 证明 X_0 不可约且上述二个条件中的任一个都引出结论 $E\cap X_0\in\mathscr{F}$.]

    属于 $\mathscr{F}$ 的集合称作 X 的**可构造**子集.

22. 设 X 是 Noether 拓扑空间, 而 E 是 X 的一个子集. 证明 E 在 X 中开当且仅当对每个 X 中的不可约闭子集 X_0, 或者 $E\cap X_0=\emptyset$, 或者 $E\cap X_0$ 包有 X_0 的一个非空开子集. [证明与习题 21 类似.]

23. 设 A 是 Noether 环, $f: A\to B$ 是有限型的环同态(因此 B 是 Noether 环). 设 $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=\mathrm{Spec}(B)$, 令 $f^*: Y\to X$ 是与 f 相伴的映射, 那么 Y 的可构造子集 E 在 f^* 之下的象是 X 的可构造子集.

    [由习题 20 只需取 $E=U\cap C$, 这里 U 在 Y 中是开集,

C在Y中是闭集．由于Y是 Noether 空间，因此E是拟紧的，所以是形如 $\mathrm{Spec}(B_g)$ 的开集的有限并．于是就化到 $E = Y$ 的情形．为证明 $f^*(Y)$ 是可构造的，利用习题 21 的判别准则：设 X_0 是X的不可约闭子集，使 $f^*(Y)\cap X_0$ 在 X_0 中稠．我们有 $f^*(Y)\cap X_0 = f^*(f^{*-1}(X_0))$, $f^{*-1}(X_0) = \mathrm{Spec}((A/\mathfrak{p})\otimes_A B)$，这里 $X_0 = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p})$．因此化到$A$是整环，$f$为单映射的情况．如果 $Y_1,\cdots,Y_n$ 是Y的不可约分支，只需证明某个 $f^*(Y_i)$ 包有X的一个非空开集．于是最后我们化到 A, B 是整环而 f 是单映射的情况；再利用第五章习题 21 即可完成证明.]

24. 沿用习题 23 的记号与假设，f^* 是开映射 $\Longleftrightarrow$ f 有下降性质（第五章，习题 10）．[假设 f 有下降性质，如同习题 23，将问题归结为证明 $E = f^*(Y)$ 是X中的开集的情形．下降性质断言，如果 $\mathfrak{p}\in E$, $\mathfrak{p}'\subseteq\mathfrak{p}$，那么 $\mathfrak{p}'\in E$，换言之，如果 X_0 是X的不可约闭子集，且 X_0 与E相交，那么 $E\cap X_0$ 在 X_0 中稠密，由习题 20 与习题 22，E在X中开.]

25. 设A是 Noether 环，$f: A\to B$ 是有限型且平坦的（即B作为A-模是平坦的），那么 $f^*: \mathrm{Spec}(B)\to\mathrm{Spec}(A)$ 是开映射．[习题 24 与第五章习题 11.]

Grothendieck 群

26. 设A是 Noether 环，用 $F(A)$ 表示有限生成 A-模的一切同构类的集合．设C是由 $F(A)$ 生成的自由交换群．对每个有限生成 A-模的短正合序列 $0\to M'\to M\to M''\to 0$，我们令C中的元素 $(M')-(M)+(M'')$ 与之相应，这里(M)是M的同构类，等等．设D是所有与短正合序列相应的元素生成的C的子群，商群 C/D 称作A的 Grothendieck 群，用 $K(A)$ 表示．如果M是有限生成 A-模，令 $\gamma(M)$ 或 $\gamma_A(M)$ 表(M)在 $K(A)$ 中的象.

i) 证明 $K(A)$ 有下述泛性质：对定义在有限生成 A-模

的类上而取值在一交换群G中的加性函数λ，存在唯一的同态 $\lambda_0 : K(A) \to G$，使 $\lambda(M) = \lambda_0(\gamma(M))$，对一切 M.

ii) 证明 $K(A)$ 是由元素 $\gamma(A/\mathfrak{p})$ 生成的，这里 $\mathfrak{p}$ 是 A 的素理想[利用习题 18].

iii) 如果 A 是域，或更一般地，如果 A 是主理想整环，那么 $K(A) \cong \mathbf{Z}$.

iv) 设 $f: A \to B$ 是有限环同态. 证明纯量的局限产生一个同态 $f_!: K(B) \to K(A)$，使得 $f_!(\gamma_B(N)) = \gamma_A(N)$ 对某个 B-模 N. 如果 $g: B \to C$ 是另一有限环同态，证明 $(g \circ f)_! = f_! \circ g_!$.

27. 设 A 是 Noether 环，并设 $F_1(A)$ 是一切有限生成的平坦 A-模的同构类集合. 重复习题 26 的造法，我们得到一个群 $K_1(A)$. 用 $\gamma_1(M)$ 表(M)在 $K_1(A)$ 中的象.

i) 证明模在 A 上作张量积导出 $K_1(A)$ 上一个交换环结构，使得 $\gamma_1(M) \cdot \gamma_1(N) = \gamma_1(M \otimes N)$. 这个环的单位元是 $\gamma_1(A)$.

ii) 证明张量积导出群 $K(A)$ 上的 $K_1(A)$ 模结构，使得 $\gamma_1(M) \cdot \gamma(N) = \gamma(M \otimes N)$.

iii) 如果 A 是 (Noether) 局部环，那么 $K_1(A) \cong \mathbf{Z}$.

iv) 设 $f: A \to B$ 是环同态，B 是 Noether 环. 证明纯量扩张产生一个环同态 $f^!: K_1(A) \to K_1(B)$ 使得 $f^!(\gamma_1(M)) = \gamma_1(B \otimes_A M)$. [如果$M$在 A上平坦且有限生成，那么 $B \otimes_A M$ 在 B 上也平坦且有限生成.] 如果 $g: B \to C$ 是另一个环同态（这里 C 是 Noether 环），那么 $(f \circ g)^! = f^! \circ g^!$.

v) 如果 $f: A \to B$ 是有限环同态，那么

$$f_!(f^!(x)y) = xf_!(y)$$

对 $x \in K_1(A)$, $y \in K(B)$. 换言之，通过纯量局限把 $K(B)$ 看作 $K_1(A)$-模，同态 $f_!$ 是 $K_1(A)$-模同态.

注记. 由于 $F_1(A)$ 是 $F(A)$ 的子集，我们有群同态 $\varepsilon: K_1(A) \to K(A)$，它由 $\varepsilon(\gamma_1(M)) = \gamma(M)$ 给出. 如果环 A 是有限维的且是正则的，即如果它的所有局部环 $A_\mathfrak{p}$ 都是正则的(第十一章)，就能证明 ε 是同构.

第八章　Artin 环

一个 **Artin 环**是满足理想降链条件（或等价地，极小条件）的环.

表面看，Artin 环和 Noether 环是对称的，然而这是误解．事实上，我们将证明 Artin 环必是 Noether 环，而且是一种类型很特殊的 Noether 环．在某种意义上，Artin 环是域之后的一种最简单的环，我们研究它不是由于它的一般性而是由于它的简单性.

命题 8.1. 在 Artin 环 A 中，每个素理想都是极大的.

证明．设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想，则 $B = A/\mathfrak{p}$ 是一个 Artin 整环．设 $x \in B$，$x \neq 0$，由降链条件有 $(x^n) = (x^{n+1})$ 对某个 n，因此 $x^n = x^{n+1}y$，对某个 $y \in B$．因为 B 是整环且 $x \neq 0$，我们可消去 x^n 而得到 $xy = 1$．因此 x 在 B 中有逆，于是 B 是域．所以 $\mathfrak{p}$ 是一个极大理想．■

系理 8.2. 在 Artin 环中小根等于大根．■

命题 8.3. 一个 Artin 环只有有限个极大理想.

证明．考察所有有限交 $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$ 构成的集合，其中 $\mathfrak{m}_i$ 是极大理想．这个集合有一极小元素．设为 $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$．因此对任一极大理想 $\mathfrak{m}$，有 $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$，于是 $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$，由(1.11) $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}_i$ 对某个 i，因为 $\mathfrak{m}_i$ 极大，故 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_i$．■

命题 8.4. 在 Artin 环中，小根 $\mathfrak{N}$ 是幂零理想.

证明．由降链条件，我们有 $\mathfrak{N}^k = \mathfrak{N}^{k+1} = \cdots = \mathfrak{a}$，对某个 $k > 0$．假定 $\mathfrak{a} \neq 0$，并设 Σ 是所有满足条件 $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \neq 0$ 的理想 $\mathfrak{b}$ 的集合．因为 $\mathfrak{a} \in \Sigma$，故 Σ 非空．设 $\mathfrak{c}$ 是 Σ 的极小元．于是存在 $x \in \mathfrak{c}$，使得 $x\mathfrak{a} \neq 0$．因 $(x) \subseteq \mathfrak{c}$，由 $\mathfrak{c}$ 的极小性得 $(x) = \mathfrak{c}$．但 $(x\mathfrak{a})\mathfrak{a} = x\mathfrak{a}^2 = x\mathfrak{a} \neq 0$，且 $x\mathfrak{a} \subseteq (x)$，因此 $x\mathfrak{a} = (x)$（仍利用

极小性)，于是 $x = xy$，对某个 $y \in \mathfrak{a}$. 因此有 $x = xy = xy^2 = \cdots = xy^n = \cdots$. 但 $y \in \mathfrak{a} = \mathfrak{N}^k \subseteq \mathfrak{N}$，故 y 是幂零元，所以 $x = xy^n = 0$. 这与 x 的选法矛盾，所以 $\mathfrak{a} = 0$. ■

环 A 的一个素理想**链**指的是一个有限的严格增序列 $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$，这个链的长度是 n. 我们定义 A 中所有素理想链的长度的上确界为 A 的**维数**. 它是一个 $\geqslant 0$ 的整数或是 $+\infty$（假定 $A \neq 0$）. 域的维数是 0，环 $\mathbf{Z}$ 维数是1.

定理 8.5. 环 A 是 Artin 环 $\Longleftrightarrow$ A 是 Noether 环且 $\dim A = 0$.

证明. $\Longrightarrow$: 由 (8.1) 我们有 $\dim A = 0$. 设 $\mathfrak{m}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 A 的不同的极大理想 (8.3)，则 $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^k \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i\right)^k = \mathfrak{N}^k = 0$，因此由(6.11) A 是 Noether 环.

$\Longleftarrow$: 因零理想有准素分解 (7.13)，A 只有有限个极小素理想，又由 $\dim A = 0$，它们都是极大的. 不妨设 $\mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$，由 (7.15) 有 $\mathfrak{N}^k = 0$. 于是如证明的前一部分，有 $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^k = 0$. 故由 (6.11) 知 A 是 Artin 环. ■

若 A 是局部 Artin 环，它的极大理想为 $\mathfrak{m}$，则 $\mathfrak{m}$ 是 A 的仅有的素理想，因此是 A 的小根. 这样 $\mathfrak{m}$ 中每个元素都是幂零元，$\mathfrak{m}$ 本身也是幂零理想. A 的每个元素或是可逆元，或是幂零元. 这种环的一个例子是 $\mathbf{Z}/(p^n)$，其中 p 为素数而 $n \geqslant 1$.

命题 8.6. 设 A 是一个 Noether 局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想，则下面两陈述恰有一个为真:

i) $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ 对所有 n;

ii) $\mathfrak{m}^n = 0$ 对某个 n，此时 A 是一个 Artin 局部环.

证明. 设对某个 n 有 $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$. 由 Nakayama 引理(2.6)，我们有 $\mathfrak{m}^n = 0$. 设 $\mathfrak{p}$ 是 A 的任一素理想，则 $\mathfrak{m}^n \leqslant \mathfrak{p}$，于是求根可得 $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$. 因此 $\mathfrak{m}$ 是 A 仅有的素理想，因此 A 是 Artin 局部环. ■

定理 8.7. （Artin 环的结构定理）. Artin 环 A 是有限个 Artin 局部环的直积，此直积在同构意义下是唯一的.

证明. 设 $\mathfrak{m}_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是 A 的不同的极大理想. 从(8.5)的证明中我们有 $\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i^k = 0$ 对某个 $k > 0$. 由(1.16)理想 $\mathfrak{m}_i^k$ 是两两互素的，因此由(1.10)，$\bigcap \mathfrak{m}_i^k = \Pi \mathfrak{m}_i^k$. 再由(1.10)推出自然映射 $A \to \prod_{i=1}^{n} A/\mathfrak{m}_i^k$ 是同构. 每个 $A/\mathfrak{m}_i^k$ 是一 Artin 局部环，因此 A 是 Artin 局部环的直积.

反之，假定 $A \cong \prod_{i=1}^{n} A_i$，其中 A_i 是 Artin 局部环，则对每个 i 有一个自然满同态（在第 i 个因子上的投影）ϕ_i: $A \to A_i$. 设 $\mathfrak{a}_i = \operatorname{Ker}(\phi_i)$. 由(1.10)这些 $\mathfrak{a}_i$ 两两互素，且 $\bigcap \mathfrak{a}_i = 0$. 设 $\mathfrak{q}_i$ 是 A_i 的唯一的素理想，$\mathfrak{p}_i$ 是它的限制 $\phi_i^{-1}(\mathfrak{q}_i)$. 由(8.1)，理想 $\mathfrak{p}_i$ 是素的，因此是极大的. 因为 $\mathfrak{q}_i$ 是幂零的，所以 $\mathfrak{a}_i$ 是 $\mathfrak{p}_i$-准素的，且 $\bigcap \mathfrak{a}_i = (0)$ 是 A 中零理想的准素分解. 因为 $\mathfrak{a}_i$ 两两互素，故 $\mathfrak{p}_i$ 也是如此，从而它们是(0)的孤立素理想. 因此所有准素分支 $\mathfrak{a}_i$ 皆是孤立的，于是由第二唯一性定理(4.11)，$\mathfrak{a}_i$ 由 A 唯一确定，故环 $A_i \cong A/\mathfrak{a}_i$ 也由 A 唯一确定. ■

例. 仅有一个素理想的环未必是 Noether 环（因此也未必是 Artin 环）. 设 $A = k[x_1, x_2, \cdots]$ 是域 k 上可数无限个未定元 x_n 的多项式环，$\mathfrak{a}$ 是理想 $(x_1, x_1^2, \cdots, x_n^2, \cdots)$. 环 $B = A/\mathfrak{a}$ 仅有一个素理想（即 $(x_1, \cdots x_n)$ 的象），因此 B 是维数 0 的局部环. 但 B 不是 Noether 环，因为不难看出它的素理想不是有限生成的.

设 A 是一局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想，$k = A/\mathfrak{m}$ 是它的同余类域，A-模 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 被 $\mathfrak{m}$ 零化，因此有 k-向量空间构造. 如果 $\mathfrak{m}$ 是有限生成的(例如当 A 是 Noether 环时)，$\mathfrak{m}$ 的生成元集合在 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 中的象将张成向量空间 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$，因此 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ 是有限的. (见(2.8).)

命题 8.8. 设 A 是一个 Artin 局部环，则下列陈述等价：

i） A 中每个理想是主理想；

ii） 极大理想 $\mathfrak{m}$ 是主理想；

iii） $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leqslant 1$.

证明． 显然有 i）$\Longrightarrow$ ii）$\Longrightarrow$ iii）.

iii）$\Longrightarrow$ i）：如果 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 0$，则 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$，则由 Nakayama 引理（2.6）有 $\mathfrak{m} = 0$，这样 A 是域，没有什么可证的．

如果 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$，则由（2.8）$\mathfrak{m}$ 是主理想，（取那里的 M 为 $\mathfrak{m}$）设 $\mathfrak{m} = (x)$，又设 $\mathfrak{a}$ 是 A 中异于(0)或(1)的理想．我们有 $\mathfrak{m} = \mathfrak{R}$，因此由（8.4）$\mathfrak{m}$ 幂零，故存在一整数 r 使得 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^r$，$\mathfrak{a} \nsubseteq \mathfrak{m}^{r+1}$，于是有 $y \in \mathfrak{a}$，使得 $y = ax^r$，$y \notin (x^{r+1})$，由此推出 $a \notin (x)$，a 是 A 中可逆元．因此 $x^r \in \mathfrak{a}$，于是 $\mathfrak{m}^r = (x^r) \subseteq \mathfrak{a}$，因此 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^r = (x^r)$，所以 $\mathfrak{a}$ 是主理想． ■

例． 环 $\mathbf{Z}/(p^n)$（p 为素数）和环 $k[x]/(f^n)$（f 为不可约）满足（8.8）*) 的条件．另一方面 Artin 局部环 $k[x^2, x^3]/(x^4)$ 不满足：这时 $\mathfrak{m}$ 由 x^2 和 x^3（mod x^4）生成，因此 $\mathfrak{m}^2 = 0$ 而 $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2$.

习　　题

1. 设 $\mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = 0$ 是一个 Noether 环中零理想的一个极小准素分解，$\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{p}_i$-准素的．$\mathfrak{p}_i^{(r)}$ 是 $\mathfrak{p}_i$ 的第 r 阶符号幂（第四章，习题 13）．证明对每个 $i = 1, \cdots, n$ 存在一个整数 r_i 使得 $\mathfrak{p}_i^{(r_i)} \subseteq \mathfrak{q}_i$.

   假设 $\mathfrak{q}_i$ 是一个孤立准素分支．那么 $A_{\mathfrak{p}_i}$ 是一个 Artin 局部环，因此如果 $\mathfrak{m}_i$ 是它的极大理想，对充分大的 r 有 $\mathfrak{m}_i^r = 0$，于是对这些大的 r 有 $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i^{(r)}$.

   若 $\mathfrak{q}_i$ 是一嵌入准素分支，则 $A_{\mathfrak{p}_i}$ 不是 Artin 环，因此这些幂次 $\mathfrak{m}_i^r$ 都不同，故 $\mathfrak{p}_i^{(r)}$ 也全不同．因此在一个给定的准素分解中，

*) 原文此处为（8.7）．——译者注

我们可用由 $\mathfrak{p}_i$-准素理想 $\mathfrak{p}_i^{(r)}$，$r \geqslant r_i$ 所构成的无限集合中的任一元素去替换 $\mathfrak{q}_i$，于是存在(0)的无限多个极小准素分解，这些分解的差别仅在于 $\mathfrak{p}_i$-分支不同.

2. 设 A 是 Noether 环. 证明下列陈述等价：

   i) A 是 Artin 环；

   ii) Spec (A) 是离散且有限的；

   iii) Spec (A) 是离散的.

3. 设 k 是一域，A 是有限生成 k-代数. 证明下列陈述等价：

   i) A 是 Artin 环；

   ii) A 是一个有限 k-代数.

   [为了证 i) $\Longrightarrow$ ii)，用(8.7)将问题化到 A 是 Artin 局部环的情形. 由零点定理，A 的同余类域是 k 的有限扩张. 然后利用 A 作为 A-模具有有限长度这一事实. 为了证 ii) $\Longrightarrow$ i)，注意 A 的理想是 k-向量子空间，因此满足降链条件.]

4. 设 f: $A \to B$ 是有限型环同态；研究下列命题：

   i) f 有限；

   ii) f^*的纤维是 Spec (B) 的离散子空间；

   iii) 对 A 的每一素理想 $\mathfrak{p}$，环 $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ 是有限 $k(\mathfrak{p})$-代数 ($k(\mathfrak{p})$ 是 $A_\mathfrak{p}$ 的同余类域)；

   iv) f^*的纤维是有限的.

   证明 i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ iv). [利用习题 2.3.] 如果 f 是整的，且 f^*的纤维是有限的，f 是否一定有限?

5. 证明第五章习题 16 中 X 是 L 的有限覆盖(即位于 L 中一给定点之上的 X 的点的个数是有限并且有界).

6. 设 A 是一 Noether 环，$\mathfrak{q}$ 是 A 中一个 $\mathfrak{p}$-准素理想. 考虑从 $\mathfrak{q}$ 到 $\mathfrak{p}$ 的准素理想链. 证明所有这种链都具有限有界长度，并且所有极大链的长度都相同.

第九章　离散赋值环和 Dedekind 整环

如我们以前所指出的，代数数论是交换代数的历史的源泉之一．在这一章里我们专门研究数论中有兴趣的情形，即 Dedekind 整环．我们从一般的准素分解定理推出 Dedekind 整环中理想的唯一分解定理．虽然直接证明当然是可以的，但人们从我们的方法中可以更深刻地领悟到数论在交换代数中的恰当的地位．另一类重要的 Dedekind 整环是与非奇异代数曲线联系而产生的．事实上，Dedekind 条件的几何描述是：维数1、非奇异．

上一章处理了维数 0 的 Noether 环，现在我们开始研究下一个最简单的情形，即维数 1 的 Noether 整环，也就是每个非零素理想都是极大的 Noether 整环．我们的第一个结果是在此种环中有理想的唯一分解定理：

命题 9.1. 设 A 是维数 1 的 Noether 整环，则 A 中每一个理想 $\mathfrak{a}$ 可唯一表为准素理想乘积，这些准素理想的根互不相同．

证明．由于 A 是 Noether 环，由 (7.13) $\mathfrak{a}$ 有一个极小准素分解 $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{q}_i$，其中每个 $\mathfrak{q}_i$ 是 $\mathfrak{p}_i$-准素的．因为 $\dim A=1$ 且 A 是整环，A 的每个非零素理想都极大，因此 $\mathfrak{p}_i$ 是互不相同的极大理想(因为 $\mathfrak{p}_i\supseteq\mathfrak{q}_i\supseteq\mathfrak{a}\neq 0$)，所以是两两互素的．由(1.16)可得 $\mathfrak{q}_i$ 两两互素，再由 (1.10) 我们有 $\Pi\mathfrak{q}_i=\cap\mathfrak{q}_i$，因此 $\mathfrak{a}=\Pi\mathfrak{q}_i$．

反之，如果 $\mathfrak{a}=\Pi\mathfrak{q}_i$，同样推理可得 $\mathfrak{a}=\cap\mathfrak{q}_i$，这是 $\mathfrak{a}$ 的一个极小准素分解，其中每个 $\mathfrak{q}_i$ 是一个孤立准素分支，因此由 (4.11)，表法是唯一的．　■

设 A 是一个维数 1 的 Noether 环，它的每个准素理想是一个素理想的幂．由 (9.1) 在这样的环中每一非 0 理想都能唯一地分解为素理想的乘积．如果我们相对于一非零素理想 $\mathfrak{p}$ 对 A 作局部

化，得到一局部环 A_p，满足和 A 一样的条件．因此 A_p 中每个非 0 理想是极大理想的幂．这种局部环也可用其它办法来刻划．

离散赋值环

设 K 是一域．$K^* = K\backslash\{0\}$ 是 K 的乘法群．K 上的一个**离散赋值**是一个从 K^* 到 $\mathbf{Z}$ 之上的映射 v，使得，

1）$v(xy) = v(x) + v(y)$，即 v 是一同态；

2）$v(x+y) \geqslant \min(v(x), v(y))$．

所有使得 $v(x) \geqslant 0$ 的 $x \in K^*$ 和 0 一起构成一环，叫做 v 的**赋值环**，它是域 K 的一个赋值环．令 $v(0) = +\infty$，就将 v 扩张到整个 K 上，有时这是很方便的．

例． 两个典型例子是：

1）$K = \mathbf{Q}$．取一固定素数 p，则任一非零 $x \in \mathbf{Q}$ 能够唯一地写成 $p^a y$ 形，其中 $a \in \mathbf{Z}$，y 的分子和分母均与 p 互素．定义 $v_p(x) = a$．v_p 的赋值环是局部环 $\mathbf{Z}_{(p)}$．

2）$K = k[x]$，其中 k 是域而 x 是未定元．取一固定的不可约多项式 $f \in k[x]$，定义 v_f 如 1)，则 v_f 的赋值环是 $k[x]$ 相对于素理想(f)的局部环．

一个整环 A 叫做**离散赋值环**，如果它的商域 K 有一个离散赋值 v 而 A 恰是 v 的赋值环．由 (5.18)，A 是一局部环，而它的极大理想 $\mathfrak{m}$ 由所有满足 $v(x) > 0$ 的 $x \in K$ 组成．

如果 A 中两个元素 x 和 y 有同样值，即 $v(x) = v(y)$，则 $v(xy^{-1}) = 0$，因此 xy^{-1} 是 A 中可逆元，故 $(x) = (y)$．

如果 $\mathfrak{a} \neq 0$ 是 A 中理想，则存在一最小整数 k 使得对某个 $x \in \mathfrak{a}$ 有 $v(x) = k$．因此 $\mathfrak{a}$ 包有一切满足 $v(y) \geqslant k$ 的 $y \in A$，于是 A 中仅有的非零理想是理想 $\mathfrak{m}_k = \{y \in A : v(y) \geqslant k\}$．这些理想形成了一单链 $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}_2 \supset \mathfrak{m}_3 \supset \cdots$，因此 A 是 Noether 环．

更进一步，因为 $v: K^* \to \mathbf{Z}$ 是满的，存在 $x \in \mathfrak{m}$ 使得 $v(x) = 1$，那么 $\mathfrak{m} = (x)$，$\mathfrak{m}_k = (x^k)$ $(k \geqslant 1)$．这样 $\mathfrak{m}$ 是 A 中

仅有的非零素理想，而 A 是 Noether 局部整环，维数为 1，它的任一非零理想都是极大理想的幂. 事实上，上面很多性质都是离散赋值环的特征性质.

命题 9.2. 设 A 是维数 1 的 Noether 局部整环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想，$k = A/\mathfrak{m}$ 是它的同余类域，则下列陈述等价：

i) A 是离散赋值环；

ii) A 是整闭的；

iii) $\mathfrak{m}$ 是主理想；

iv) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$；

v) 每个非零理想是 $\mathfrak{m}$ 的一个幂；

vi) 存在 $x \in A$，使得每个非零理想形如 (x^k)，$k \geqslant 0$.

证明. 在开始巡迴证明之前，先作两点注记：

(A) 如 $\mathfrak{a}$ 是 $\neq 0$, (1) 的理想，则 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的且 $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^n$，对某个 n. 因为 $\mathfrak{m}$ 是唯一的非零素理想，故 $r(\mathfrak{a}) = \mathfrak{m}$，再利用 (7.16)即可.

(B) 由(8.6)可得 $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ 对一切 $n \geqslant 0$.

i) $\Longrightarrow$ ii) 由 (5.18) 得出.

ii) $\Longrightarrow$ iii) 设 $a \in \mathfrak{m}$，$a \neq 0$. 由注记 (A) 存在一整数 n 使得 $\mathfrak{m}^n \subseteq (a)$，$\mathfrak{m}^{n-1} \nsubseteq (a)$. 选取 $b \in \mathfrak{m}^{n-1}$，$b \notin (a)$，设 $x = a/b \in K$ (A 的分式域). 我们有 $x^{-1} \notin A$ (因 $b \notin (a)$)，故 x^{-1} 在 A 上不是整元. 由 (5.1) 我们有 $x^{-1}\mathfrak{m} \nsubseteq \mathfrak{m}$ (如果 $x^{-1}\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$，则 $\mathfrak{m}$ 就是一个忠实 $A[x^{-1}]$-模，作为 A-模是有限生成的). 但由 x 的构作法知 $x^{-1}\mathfrak{m} \subseteq A$，于是 $x^{-1}\mathfrak{m} = A$，因此 $\mathfrak{m} = Ax = (x)$.

iii) $\Longrightarrow$ iv) 由 (2.8) 有 $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leqslant 1$，再由注记 (B) 有 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \neq 0$.

iv) $\Longrightarrow$ v) 设 $\mathfrak{a}$ 是不等于 (0) 和 (1) 的理想. 由注记 (A) 有 $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{m}^n$ 对某个 n. 将 (8.8) 应用到 $A/\mathfrak{m}^n$ 上得到 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的一个幂.

v) $\Longrightarrow$ vi). 由注记 (B) $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$，因此存在 $x \in \mathfrak{m}$，$x \notin \mathfrak{m}^2$. 但由假设 $(x) = \mathfrak{m}^r$，故 $r = 1$，$(x) = \mathfrak{m}$，$(x^k) = \mathfrak{m}^k$.

vi)$\Longrightarrow$i). 显然 $(x)=m$，因此由注记(B)$(x^k)\neq(x^{k+1})$. 因此，如 a 是 A 中任一非0元素，恰对一个整数 k 有 $(a)=(x^k)$. 定义 $v(a)=k$，通过 $v(ab^{-1})=v(a)-v(b)$ 将 v 扩张到 K^*，可验证 v 的定义是合理的而且是一离散赋值，同时 A 是 v 的赋值环. ■

Dedekind 整环

定理 9.3. 设 A 是维数 1 的 Noether 整环，则下列陈述等价：

i) A 是整闭的；

ii) A 中每个准素理想都是素理想的一个幂；

iii) 每个局部环 $A_\mathfrak{p}(\mathfrak{p}\neq 0)$ 都是一个离散赋值环.

证明. i)$\Longleftrightarrow$iii) 由(9.2)和(5.13)得.

ii)$\Longleftrightarrow$iii). 利用(9.2)以及由(4.8)及(3.11)而得的下述事实：准素理想及理想的幂在局部化下仍然分别是准素理想及理想的幂. ■

满足(9.3)中条件的环叫做 Dedekind **整环**.

系理 9.4. 在一 Dedekind 整环中，每一非零理想唯一分解为素理想之积.

证明. 由(9.1)和(9.3)得. ■

例. 1) 任一主理想整环 A. A 是 Noether 环(因为每一个理想是有限生成)，并且维数是1(见(1.6)后的例3). 每个局部环 $A_\mathfrak{p}(\mathfrak{p}\neq 0)$ 也是主理想整环，故由(9.2) $A_\mathfrak{p}$ 是离散赋值环，因此由(9.3) A 是 Dedekind 整环.

2) K 是代数数域($\mathbf{Q}$ 的有限代数扩张). 它的整数环 A 是 $\mathbf{Z}$ 在 K 中的整闭包. (例如，设 $K=\mathbf{Q}(i)$，则 $A=\mathbf{Z}[i]$，Gauss 整数环.)则 A 是一个 Dedekind 环：

定理 9.5. 代数数域的整数环是 Dedekind 整环.

证明. K 是 $\mathbf{Q}$的可分扩张(因为特征是 0)，因此由(5.17)存在 K 在 $\mathbf{Q}$ 上的基 $v_1,\cdots,v_n$ 使得 $A\subseteq\sum\mathbf{Z}v_j$. 因此 A 是有限生

成 $\mathbf{Z}$-模，故是 Noether 环．由(5.5) A 还是整闭的．为完成证明我们尚须证明 A 中每个非 0 素理想皆极大．这由(5.8)和(5.9)可得：由(5.9) $\mathfrak{p}\cap\mathbf{Z}\neq 0$，因此 $\mathfrak{p}\cap\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{Z}$ 中极大理想，于是由(5.8) $\mathfrak{p}$ 是 A 中极大理想． ■

注记．唯一分解定理(9.4)本来是对代数数域中的整数环证的．第四章的唯一性定理可以看作这一结果的推广：素理想幂代之以准素理想，乘积代之以交．

分 式 理 想

A 是一整环，K 是它的商域．A 的**分式理想**是 K 的一个 A-子模 M，满足 $xM\subseteq A$，对某个 A 中非 0 元素 x．特别"通常"理想(现在称**整**理想)是分式理想(取 $x=1$)．任一元素 $u\in K$ 生成一分式理想，记为 (u) 或 (Au)，叫做**主**理想．若 M 是一分式理想，所有满足 $xM\subseteq A$ 的 $x\in K$ 的集合记为 $(A:M)$．

K 的每个有限生成 A-模 M 是分式理想．因为如果 M 由 $x_1,\cdots,x_n\in K$ 生成，我们可写 $x_i=y_iz^{-1}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，其中 y_i 和 z 在 A 中，那么 $zM\subseteq A$．反之，如果 A 是 Noether 环，那么每个分式理想是有限生成的，因为分式理想可表为 $x^{-1}\mathfrak{a}$ 形式，$\mathfrak{a}$ 是某个整理想．

K 的一个 A-子模 M 叫做**可逆理想**，如果存在 K 的一个 A-子模 N，使得 $MN=A$．模 N 是唯一的并且等于 $(A:M)$，因为我们有 $N\subseteq(A:M)=(A:M)MN\subseteq AN=N$．可以推出 M 是有限生成的，因而是分式理想；因为 $M(A:M)=A$，所以存在 $x_i\in M$，$y_i\in(A:M)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 使得 $\sum x_iy_i=1$，因此对任一 $x\in M$，有 $x=\sum(y_ix)x_i$，每个 $y_ix\in A$，故 M 由 $x_1,\cdots,x_n$ 生成．

显然每个非 0 主理想 (u) 是可逆的，它的逆是 (u^{-1})．所有可逆理想对于乘法作成一群，它的单位元是 $A=(1)$．

可逆性是一个**局部性质**：

命题 9.6. 对一分式理想 M，下列陈述等价：

i) M是可逆的；

ii) M是有限生成，且对每个素理想 $\mathfrak{p}$，$M_\mathfrak{p}$ 是可逆的；

iii) M是有限生成，且对每个极大理想 $\mathfrak{m}$，$M_\mathfrak{m}$ 是可逆的.

证明. i)$\Longrightarrow$ii)：由 (3.11) 和 (3.15) $A_\mathfrak{p} = M \cdot (A:M)_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p} \cdot (A_\mathfrak{p}:M_\mathfrak{p})$（因为$M$是可逆的，故是有限生成的）.

ii)$\Longrightarrow$iii) 显然.

iii)$\Longrightarrow$i)：设 $\mathfrak{a} = M \cdot (A:M)$，这是一整理想. 对每一极大理想 $\mathfrak{m}$，我们有 $\mathfrak{a}_\mathfrak{m} = M_\mathfrak{m}(A_\mathfrak{m}:M_\mathfrak{m})$（由 (3.11) 和 (3.15)）又$=A_\mathfrak{m}$（因 $M_\mathfrak{m}$ 可逆），于是有 $\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{m}$. 因此 $\mathfrak{a} = A$，即M是可逆的. ■

命题 9.7. 设A是一个局部整环. 那么A是离散赋值环$\Longleftrightarrow$ A中每个非 0 分式理想可逆.

证明. $\Longrightarrow$：设 x 是A中极大理想 $\mathfrak{m}$ 的生成元，并设 $M \neq 0$ 是一分式理想，则存在 $y \in A$，使得 $yM \subseteq A$，这样 yM 是一个整理想，设为 (x^r)，于是 $M = (x^{r-s})$ 这里 $s = v(y)$.

$\Longleftarrow$：每个非 0 理想可逆，则必是有限生成的，所以 A 是 Noether 环. 我们只需证明每个非 0 整理想是 $\mathfrak{m}$ 的一个幂就够了. 假设不然，设Σ是不为 $\mathfrak{m}$ 的幂的非 0 理想构成的集合，$\mathfrak{a}$ 是Σ中一个极大元，则 $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{m}$，故 $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$，因此 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = A$ 是一真(整)理想，且 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{a}$. 如果 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$，则 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}\mathfrak{a}$，于是由 Nakayama 引理 (2.6) 有 $\mathfrak{a} = 0$，因此 $\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a} \supset \mathfrak{a}$，而由 $\mathfrak{a}$ 的极大性，$\mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{m}$ 的幂，于是 $\mathfrak{a}$ 也是 $\mathfrak{m}$ 的幂，矛盾！ ■

与(9.7)相应的"全局"命题是

定理 9.8. 设A是一整环，那么A是 Dedekind 整环$\Longleftrightarrow$ A中每个非 0 分式理想可逆.

证明. $\Longrightarrow$：设 $M \neq 0$ 是一分式理想. 因A是 Noether 环，故M有限生成. 对每一素理想 $\mathfrak{p} \neq 0$，$M_\mathfrak{p}$ 是离散赋值环 $A_\mathfrak{p}$ 中的非 0 分式理想，由 (9.7) $M_\mathfrak{p}$ 是可逆的，再由 (9.6) 可知M是可逆的.

$\Longleftarrow$：每个非 0 整理想是可逆的，因而是有限生成的，故 A 是 Noether 环．我们来证明每个 $A_{\mathfrak{p}}$ $(\mathfrak{p} \neq 0)$ 是离散赋值环．为此只要证明 $A_{\mathfrak{p}}$ 中每个非 0 整理想是可逆的，再应用(9.7)即可．设 $\mathfrak{b} \neq 0$ 是 $A_{\mathfrak{p}}$ 中一个(整)理想，设 $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^c = \mathfrak{b} \cap A$，则 $\mathfrak{a}$ 可逆，因此由(9.6)*⁾知 $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ 可逆．■

系理 9.9. 设 A 是 Dedekind 整环，则 A 中非 0 分式理想对于乘法组成一群．■

这群称为 A 的**理想群**，我们把它记作 I．用这个术语，(9.4)是说 I 是由 A 中非 0 素理想生成的自由(交换)群．

设 K^* 记 A 的分式域 K 的乘法群．每个 $u \in K^*$ 定义一分式理想 (u)，而映射 $u \longmapsto (u)$ 定义一同态 φ: $K^* \to I$．φ 的象 P 称为主分式理想群．商群 $H = I/P$ 叫做 A 的**理想类群**．φ 的核 U 是所有适合 $(u) = (1)$ 的元素 $u \in K^*$ 的集合，所以它是 A 的可逆元群．我们有正合列

$$1 \to U \to K^* \to I \to H \to 1.$$

注记． 对于数论中出现的 Dedekind 整环，关于群 H 和 U 有一些经典定理．设 K 是一代数数域，A 是它的整数环，由(9.5)它是 Dedekind 整环．在此情形：

1）H 是有限群．它的阶 h 是域 K 的**类数**．下列陈述是等价的：i）$h = 1$；ii）$I = P$；iii）A 是主理想整环；iv）A 是唯一分解整环．

2）U 是**有限生成**交换群，更确切地，我们可以确定 U 的生成元个数．首先 U 中有限阶元恰是 K 中的单位根．它们作成一个有限循环群 W，U/W 是无扭的(torsion-free)．U/W 的生成元个数如下给出：如果 $(K: \mathbf{Q}) = n$，则存在 n 个不同的嵌入 $K \to \mathbf{C}$（复数域）．设其中 r_1 个将 K 映入 $\mathbf{R}$，其余成对的映射有 r_2 对(如果 α 是一个映射，则 $\omega \circ \alpha$ 是另一个，其中 ω 是由 $\omega(z) = \bar{z}$ 所定义的 $\mathbf{C}$ 的自同构)，这样 $r_1 + 2r_2 = n$，U/W 的生成元个数是

---

*⁾ 原文此处为(9.7)．——译者注

$r_1 + r_2 - 1$.

这些结果的证明是代数数论的而不是交换代数的：它所要求的技巧与本书中所使用的是根本不同的.

例. 1) $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$; $n = 2$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_1 + r_2 - 1 = 0$, $\mathbf{Z}[i]$ 中仅有的可逆元是四个单位根$\pm 1, \pm i$.

2) $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2})$; $n = 2$, $r_1 = 2$, $r_2 = 0$, $r_1 + r_2 - 1 = 1$, $W = \{\pm 1\}$, 而 U/W 是无限循环群. 事实上 $A = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ 中的可逆元是 $\pm(1 + \sqrt{2})^n$, 其中 n 是任意有理整数.

习　　题

1. 设A是 Dedekind 整环，S是A中的一个乘法封闭子集. 证明 $S^{-1}A$ 或是 Dedekind 整环或是A的分式域.

   假定 $S \neq A\backslash\{0\}$，设H和H'分别是A和$S^{-1}A$ 的理想类群. 证明理想的扩张诱导出 $H \to H'$ 的一个满同态.

2. 设A是 Dedekind 整环. 如果 $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 是系数在A中的多项式. f的**容度**(content)是A中理想 $c(f) = (a_0, \cdots, a_n)$. 证明 Gauss **引理**: $c(fg) = c(f)c(g)$.

   [在每个极大理想上作局部化.]

3. 一个赋值环(不是域)是 Noether 环当且仅当它是离散赋值环.

4. 设A是一个局部整环，A不是域，而它的极大理想$\mathfrak{m}$是主理想且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{m}^n = 0$. 证明$A$是离散赋值环.

5. M是一 Dedekind 整环上的有限生成模. 证明M是平坦模$\Longleftrightarrow$ M是无扭的.

   [利用第三章，习题 13 及第七章，习题 16.]

6. 设M是 Dedekind 整环A上一个有限生成扭型模($T(M) = M$). 证明M可以唯一地被表为模 $A/\mathfrak{p}_i^{n_i}$ 的有限直和. 其中$\mathfrak{p}_i$是A的非零素理想. [对每个 $\mathfrak{p} \neq 0$, $M_\mathfrak{p}$ 是一个扭型 $A_\mathfrak{p}$-模，再利用主理想整环上模的结构定理.]

7. 设 A 是 Dedekind 整环，而 $\mathfrak{a} \neq 0$ 是 A 中的一个理想. 证明 $A/\mathfrak{a}$ 中每个理想都是主理想.

由此导出，A 中每个理想至多可由 2 个元素生成.

8. 设 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ 是一 Dedekind 整环中的三个理想. 证明

$$\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$$
$$\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c}).$$

[局部化.]

9. (孙子定理)设 $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ 是一个 Dedekind 环 A 中的理想，$x_1, \cdots, x_n$ 是 A 中元素，则同余方程组 $x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{a}_i} (1 \leqslant i \leqslant n)$ 在 A 中有解 $x \Longleftrightarrow x_i \equiv x_j \pmod{\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j}$，只要 $i \neq j$.

[这等价于说 A-模序列

$$A \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i=1}^{n} A/\mathfrak{a}_i \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i<j} A/(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j)$$

是正合序列，其中 ϕ 和 ψ 如下定义：

$$\phi(x) = (x + \mathfrak{a}_1, \cdots, x + \mathfrak{a}_n);$$

$\psi(x_1 + \mathfrak{a}_1, \cdots, x_n + \mathfrak{a}_n)$ 的 (i, j) 分量是 $x_i - x_j + \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j$. 为了证明这个序列正合只要证明对任一素理想 $\mathfrak{p} \neq 0$ 局部化后正合就够了：换句话说我们可以假定 A 是离散赋值环，这样就容易了.]

第十章 完 备 化

在古典代数几何(即复数域上的代数几何)中,我们能够应用超越方法. 这就是说我们将一个有理函数看作一个(对于一个或多个复变量的)解析函数并研究它在一个点上的幂级数展开. 在抽象代数几何中,我们至多只能考虑相应的形式幂级数. 这种办法虽然不象在全纯情形那样强有力,但仍不失为一种有用的工具. 用形式幂级数来代替多项式的过程是被称之为**完备化**的这种一般手段的一个例子. 另一个完备化的重要例子是出现于代数数论中的 p-adic 数的构成. 设 p 是 $\mathbf{Z}$ 中一个素数,我们可以考虑这些不同的商环 $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. 换句话说,我们可以对越来越大的 n 去试解 $\bmod p^n$ 的同余式. 这很类似于通过 Taylor 展开各项所给出的逐次逼近法. 正如引入形式幂级数一样,引入 p-adic 数也是很便利的,它们可以看作 $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ 当 $n\to\infty$ 时在某种意义下的极限. 但从另一方面看,p-adic 数比(单变元)形式幂级数更复杂. 事实上,n 次多项式可以自然地被嵌入形式幂级数,而群 $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ 却不能被嵌入 $\mathbf{Z}$. 虽然一个 p-adic 数能够被想象成一个形式幂级数 $\sum a_n p^n$ $(0\leqslant a_n<p)$,这种表达式在环运算下所表现出来的性质并不好.

本章中我们将描述,用一般的理想代替素数 p 时所谓 "adic" 完备化的一般过程. 用拓扑的语言来表述它是最方便的了. 但读者须注意不要被实数拓扑的直觉所迷惑. 他必须考虑形式幂级数拓扑. 在这种拓扑中,一个幂级数"小"是指它仅包含高阶项. 或者他要能考虑 $\mathbf{Z}$ 上的 p-adic 拓扑,在这里一个整数"小"是指它能被 p 的高次幂所整除.

完备化象局部化一样,是通过把注意力集中在一个点(或一个素数)的近旁,从而达到简化事物的一种方法. 但完备化比局部化

简化得更厉害. 例如在代数几何中，一个 n 维代数簇上非奇异点的局部环总以 n 变元形式幂级数环作为完备化（这将在十一章证明）. 同时，两个非奇异点的局部环不能彼此同构，除非它们所在的簇是双有理等价的(即两个局部环的分式域是同构的).

局部化的两个重要性质是它保持正合性和 Noether 性质. 当局限于有限生成模时，同样的断言对完备化也是对的，但这个证明较难，占去本章很大篇幅. 另一重要结果是 Krull 定理，它鉴定出环中经过完备化所零化的部分. 粗略地讲，Krull 定理是解析函数由 Taylor 展开的系数所决定这一事实的类比. 这个类比对Noether局部环是最清楚的，这时该定理恰断言 $\cap m^n = 0$，其中 m 是极大理想. Krull 定理和完备化的正合性二者均可作为著名的 Artin-Rees 引理的简单推论. 因此我们在处理上将此引理置于中心地位.

我们将会看出为了研究完备化引入分次环是必要的. 分次环的原型是多项式环 $k[x_1, \cdots, x_n]$，次数是通过取每个变量次数为 1 而得到的那个平常的次数. 正如不分次环是仿射代数几何的基础一样，分次环是射影代数几何的基础，因此它具有值得考虑的几何重要性. 我们还将讨论相对于环 A 中理想 $\mathfrak{a}$ 的相伴分次环 $G_{\mathfrak{a}}(A)$ 这一重要构造，它有明确的几何解释. 例如，设 A 是簇 V 上一点 P 的局部环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的极大理想，则 $G_{\mathfrak{a}}(A)$ 对应于 P 点的射影切锥面，即所有过 P 并在 P 点与 V 相切的线. 这个几何图象有助于说明在讨论关于 P 点附近 V 的性质，特别是研究完备化 $\hat{A}$ 时 $G_{\mathfrak{a}}(A)$ 的意义.

拓扑和完备化

设 G 是一拓扑交换群(写为加法群)，不一定是 Hausdorff 的，即 G 既是拓扑空间又是交换群，并且这两种结构是相容的，即分别由 $(xy) \longmapsto x+y$ 和 $x \longmapsto -x$ 定义的 $G \times G \to G$ 和 $G \to G$ 的映射是连续的. 若 $\{0\}$ 在 G 中闭，则 $G \times G$ 中对角线是闭集

(因为它是在映射 $(x, y) \mapsto x-y$ 下 $\{0\}$ 的原象)，于是G是 Hausdorff 的. 设 a 为G中一固定元，由 $T_a(x)=x+a$ 定义的平移 T_a 是G到G之上的同胚(因 T_a 和其逆 T_{-a} 都是连续的)，因此如果U是G中 0 的任一邻域，则 $U+a$ 是 a 在G中一邻域，反之 a 的每个邻域皆以这种形式出现. 这样G的拓扑由G中 $\mathbf{0}$ 的邻域唯一确定.

引理 10.1. 设H是G中 0 的一切邻域的交，则

i) H是子群.

ii) H是$\{0\}$的闭包.

iii) G/H 是 Hausdorff 的.

iv) G 是 Hausdorff 的$\Longleftrightarrow H=0$.

证明. i) 由群运算的连续性得到. 为证明 ii) 我们有:

$x \in H \Longleftrightarrow 0 \in x-U$ 对 0 的一切邻域 $U \Longleftrightarrow x=\overline{\{0\}}$.

ii) 意味着H的陪集都是闭的，因此 G/H 的点都是闭的，所以G/H是 Hausdorff 的. 于是 $H=0 \Longrightarrow G$ 是 Hausdorff 的，反之是显然的. ■

为简单起见，假定 $0 \in G$ 具有可数的基础邻域组，则G的完备化 $\hat{G}$ 可按通常方法通过 Cauchy 序列来定义. G中元素序列 (x_r) 被定义为 **Cauchy 序列**是指对 0 的任一邻域 U，存在一个整数 $s(U)$ 具有性质

$$x_\mu - x_\nu \in U \text{ 对一切 } \mu, \nu \geqslant s(U).$$

两个 Cauchy 序列**等价**是指在G中 $x_\nu - y_\nu \to 0$. 全部 Cauchy 序列的等价类集合记为 $\hat{G}$. 如果 (x_ν)，(y_ν) 是 Cauchy 序列，则 $(x_\nu + y_\nu)$ 也是 Cauchy 序列，而且它在 $\hat{G}$ 中的类仅依赖于(x_ν)和(y_ν)的类. 于是在 $\hat{G}$ 中我们有加法，对这加法，$\hat{G}$ 是一交换群. 对每个 $x \in G$，常数序列(x)的类是 $\hat{G}$ 中一元素 $\phi(x)$，这样 $\phi: G \to \hat{G}$ 是一交换群的同态，注意ϕ不一定是单映射. 事实上，我们有

$$\operatorname{Ker} \varphi = \bigcap U,$$

这里U跑过 0 在G中的一切邻域. 因此由 (10.1)可知ϕ是单映射

当且仅当G是 Hausdorff 的.

如果H是另一个交换拓扑群，而 $f: G \to H$ 是连续同态，则G中 Cauchy 序列在f下的象是H中 Cauchy 序列，于是f诱导出同态 $\hat{f}: \hat{G} \to \hat{H}$，它是连续的. 如果 $G \xrightarrow{f} H \xrightarrow{g} K$，则 $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}$.

到目前为止我们讨论得很一般，例如可以取G是按照通常拓扑的有理数加群，这时$\hat{G}$就是实数加群. 现在，我们局限于考虑交换代数中出现的特殊类型的拓扑，就是说，我们假定 $0 \in G$ 有一组由子群组成的基础邻域组. 这样，我们就有子群序列

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n \supseteq \cdots.$$

$U \subseteq G$ 是 0 的邻域当且仅当它包有某个 G_n. 一个典型例子是 $\mathbf{Z}$ 上的 p-adic 拓扑，这时 $G_n = p^n\mathbf{Z}$ 注意在这类拓扑中G的子群G_n都是既开且闭的. 事实上若 $g \in G_n$，则 $g + G_n$ 就是g的邻域，因为 $g + G_n \subseteq G_n$，这说明G_n是开的. 因此对任一h，陪集 $h + G_n$ 都是开的，故 $\bigcup\limits_{h \notin G_n}(h + G_n)$ 是开集，而这正是G_n在G中补集合，故G_n又是闭的.

对于由子群序列所给的拓扑，另有一个纯代数的完备化定义，而这常常是很方便的. 设(x_ν)是G中 Cauchy 序列，则x_ν在G/G_n中的象最终要是常数，设等于ξ_n. 假设我们从 $n+1$ 过渡到 n，则很清楚在投影

$$G/G_{n+1} \xrightarrow{\theta_{n+1}} G/G_n$$

下 $\xi_{n+1} \to \xi_n$. 这样G中一个 Cauchy 序列定义一个**协调序列**(coherent sequence) (ξ_n)，所谓协调是指

$$\theta_{n+1}\ \xi_{n+1} = \xi_n \quad \forall n.$$

进一步，显然等价的 Cauchy 序列定义同一协调序列. 最后给定一个协调序列 (ξ_n)，通过取x_n为ξ_n陪集中任一元素（于是 $x_{n+1} - x_n \in G_n$）我们能构造一个 Cauchy 序列(x_n). 这样$\hat{G}$能够等价地定义为带有显然群结构的协调序列(ξ_n)的集合.

现在我们达到了**反向极限** (inverse limit) 的一个特殊情形. 更一般地，研究任一群 $\{A_n\}$ 及同态

$$\theta_{n+1}: \quad A_{n+1} \to A_n$$

的序列．我们称这为**反向系统**，而所有协调序列 (a_n)（即 $a_n \in A_n$ 而 $\theta_{n+1}a_{n+1} = a_n$）组成的群叫做这个系统的反向极限． 通常记作 $\varprojlim A_n$，同态 θ_n 被省略了．用这个记号我们有

$$\hat{G} = \varprojlim G/G_n.$$

$\hat{G}$ 的反向极限定义有很多好处．它的主要不足之处是先要假设有一固定选取的子群列 G_n． 我们能够有不同的序列 G_n 定义同一拓扑，因而有同一完备化，自然我们可以定义反向系统"等价"的概念，但拓扑语言的长处恰在于这种概念已经建立在其中了．

完备化的正合性用反向极限讨论得十分好．首先我们要注意到反向系统 $\{G/G_n\}$ 的一个特殊性质，即 θ_{n+1} 总是满的． 我们称任一具有这个性质的反向系统为**满**系统． 假定 $\{A_n\}$，$\{B_n\}$，$\{C_n\}$ 是三个反向系统并且有正合序列的交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_{n+1} & \to & B_{n+1} & \to & C_{n+1} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & \to & 0 \end{array}$$

那么就说我们有一个反向系统的正合序列． 这个图自然诱导出同态

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0,$$

但这个序列并不总是正合的．然而，我们有

命题 10.2. 若 $0 \to \{A_n\} \to \{B_n\} \to \{C_n\} \to 0$ 是一反向系统的正合序列，则

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n$$

总是正合的．若再设 $\{A_n\}$ 是满系统，则

$$0 \to \varprojlim A_n \to \varprojlim B_n \to \varprojlim C_n \to 0$$

正合，

证明． 设 $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 并且定义 d^A：$A \to A$，令 $d^A(a_n) = a_n - \theta_{n+1}(a_{n+1})$，则Ker $d^A \cong \varprojlim A_n$． 类似地定义 B，C 和 d^B，d^C．反向系统的正合序列决定一个正合序列交换图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow{d^A} & & \downarrow{d^B} & & \downarrow{d^C} & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

因此由(2.10)，有正合序列

$0 \to \operatorname{Ker} d^A \to \operatorname{Ker} d^B \to \operatorname{Ker} d^C \to \operatorname{Coker} d^A \to \operatorname{Coker} d^B \to \operatorname{Coker} d^C$
$\to 0$ 为了完成证明，我们只需证

$$\{A_n\} \text{ 满} \Longrightarrow d^A \text{ 满}.$$

而这是很清楚的，因为要证明 d^A 满，我们只要对给定的 $a_n \in A_n$ 归纳地解方程

$$x_n - \theta_{n+1}(x_{n+1}) = a_n,$$

解出 $x_n \in A_n$. ■

注记．群 $\operatorname{Coker} d^A$ 通常被记作 $\varprojlim{}^1 A_n$，因为它是同调代数意义下的导出函子.

系理 10.3. 设 $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ 是一个群的正合序列，G 有由子群序列 $\{G_n\}$ 定义的拓扑，并且对 G', G'' 给出由子群序列 $\{G' \cap G_n\}$, $\{pG_n\}$ 所诱导的拓扑，则

$$0 \to \hat{G}' \to \hat{G} \to \hat{G}'' \to 0$$

是正合的.

证明．将(10.2)用到正合列

$$0 \to \frac{G'}{G' \cap G_n} \to \frac{G}{G_n} \to \frac{G''}{pG_n} \to 0$$

即可. ■

特别我们能应用 (10.3) 于 $G' = G_n$ 的情形，那么 $G'' = G/G_n$ 有离散拓扑，于是 $\hat{G}'' = G''$. 这样我们推出：

系理 10.4. $\hat{G}_n$ 是 $\hat{G}$ 的子群且

$$\hat{G}/\hat{G}_n \cong G/G_n. \quad ■$$

在 (10.4) 中取反向极限我们得到

命题 10.5. $\hat{\hat{G}} = \hat{G}$. ■

如果 ϕ: $G \to \hat{G}$ 是一个同构，我们就说 G 是**完备的**. (10.5) 断言 G 的完备化是完备的. 注意我们的完备定义包括了拓扑是

Hausdorff 的情形(由(10.1)).

我们所考虑的这种拓扑群的最重要的一类例子是取 $G = A$, $G_n = \mathfrak{a}^n$, 其中 $\mathfrak{a}$ 是环 A 的一个理想. 这样定义出的 A 的拓扑叫做 $\mathfrak{a}$-adic **拓扑**,或就叫做 $\mathfrak{a}$-**拓扑**. 因为 $\mathfrak{a}^n$ 是理想, 不难验证对于这种拓扑, A 是一个**拓扑环**, 也就是说环的运算是连续的. 由(10.1),这个拓扑是 Hausdorff 拓扑 $\Longleftrightarrow \bigcap \mathfrak{a}^n = (0)$. A 的完备化 $\hat{A}$ 也是拓扑环. ϕ: $A \to \hat{A}$ 是连续的环同态,它的核是 $\bigcap \mathfrak{a}^n$.

类似地对于一个 A-模 M, 取 $G = M$, $G_n = \mathfrak{a}^n M$, 就定义 M 上的 $\mathfrak{a}$-**拓扑**,M 的完备化 $\hat{M}$ 是一拓扑 $\hat{A}$- 模(即 $\hat{A} \times \hat{M} \to \hat{M}$ 是连续的). 如果 f: $M \to N$ 是任一 A-模同态, 则 $f(\mathfrak{a}^n M) = \mathfrak{a}^n f(M) \subseteq \mathfrak{a}^n N$, 因此 f 是连续的(相对于 M 和 N 的 $\mathfrak{a}$-拓扑), 于是可定义 $\hat{f}$: $\hat{M} \to \hat{N}$.

例. 1) $A = k[x]$, k 是域, x 是未定元, $\mathfrak{a} = (x)$, 则 $\hat{A}$ = 形式幂级环 $k[[x]]$.

2) $A = \mathbf{Z}$, $\mathfrak{a} = (p)$, p 是素数,则 $\hat{A}$ 是 p-adic 整数环. 它的元素是无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$, $0 \leqslant a_n \leqslant p-1$. 当 $n \to \infty$ 时有 $p^n \to 0$.

滤　　链

对一个 A-模 M, 通过取子模 $\mathfrak{a}^n M$ 作为 0 的基础邻域可定义 $\mathfrak{a}$-拓扑, 然而还有其它方式定义同一拓扑. 一个(无限)链 $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$, 链中 M_n 皆是 M 的**子模**, 叫做 M 的一个**滤链**(filtration), 并记作 (M_n). 若 $\mathfrak{a} M_n \subseteq M_{n+1}$, 对一切 n, 则称为 $\mathfrak{a}$-**滤链**. 若 $\mathfrak{a} M_n = M_{n+1}$, 对一切充分大的 n, 则称为**稳定** $\mathfrak{a}$-**滤链**. 这样 $(\mathfrak{a}^n M)$ 是一个稳定 $\mathfrak{a}$-滤链.

引理 10.6. 如果 (M_n) 和 (M'_n) 都是 M 的稳定 $\mathfrak{a}$-滤链, 则它们有有界差: 这是指存在一个整数 n_0 使得 $M_{n+n_0} \subseteq M'_n$ 和 $M'_{n+n_0} \subseteq M_n$ 对一切 $n \geqslant 0$. 因此所有稳定 $\mathfrak{a}$-滤链定义相同拓

扑，即 $\mathfrak{a}$–拓扑.

证明． 只要对 $M'_n = \mathfrak{a}^n M$ 证便足够了．因 $\mathfrak{a}M_n \subseteq M_{n+1}$ 对一切 n，我们有 $\mathfrak{a}^n M \subseteq M_n$．又可设对一切 $n \geqslant n_0$ 有 $\mathfrak{a}M_n = M_{n+1}$，因此 $M_{n+n_0} = \mathfrak{a}^n M_{n_0} \subseteq \mathfrak{a}^n M$． ■

分次环和分次模

一个分次环 (graded ring) 是指一个环 A 及 A 的加法群的一组子群 $(A_n)_{n\geqslant 0}$，使得 $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ 且 $A_m A_n \subseteq A_{m+n}$ 对一切 $m, n \geqslant 0$．这样 A_0 是 A 的子环而每个 A_n 是一个 A_0–模.

例． $A = k[x_1, \cdots, x_r]$，$A_n =$ 所有 n 次齐次多项式构成的集合.

设 A 是一个分次环，一个**分次 A–模**是指一个 A–模M及M的一组子群 $(M_n)_{n\geqslant 0}$，使得 $M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ 且 $A_m M_n \subseteq M_{m+n}$ 对一切 $m, n \geqslant 0$． 这样每个 M_n 是一个 A_0–模． M中一个元素 x 称**齐次的**，如果对某个 n，$x \in M_n$ ($n = x$ 的次数)． 任何一个元素 $y \in M$ 可唯一地写为一个有限和 $\sum_n y_n$，其中 $y_n \in M_n$，对一切 $n \geqslant 0$ 且除了有限个 y_n 外全是0． 非 0 分量 y_n 称为 y 的**齐次分量**.

设 M, N 是分次 A–模，一个**分次 A–模同态**是指一个 A–模同态 f: $M \to N$ 使得 $f(M_n) \subseteq N_n$ 对一切 $n \geqslant 0$.

设 A 是分次环，设 $A_+ = \bigoplus_{n>0} A_n$，$A_+$ 是 A 的一个理想.

命题 10.7. 对一个分次环 A，下述论断等价:

i) A 是 Noether 环;

ii) A_0 是 Noether 环且 A 是有限生成 A_0–代数.

证明． i)$\Longrightarrow$ii)． $A_0 \cong A/A_+$，因此是 Noether 环． A_+ 是 A 的理想，故是有限生成的，设由 $x_1, \cdots, x_s$ 生成，我们可取它们为 A 的齐次元素，次数为 $k_1, \cdots, k_s$ (都>0)． 设 A' 是由 $x_1, \cdots,$

x_s 在 A_0 上生成的 A 的子环．我们对 n 作归纳法来证明 $A_n \subseteq A'$ 对一切 $n \geqslant 0$．当 $n=0$ 时这自然是真的．设 $n>0$，$y \in A_n$，因 $y \in A_+$，y 是 x_i 的线性组合，设 $y=\sum_{i=1}^{s} a_i x_i$，其中 $a_i \in A_{n-k_i}$（若 $m<0$，约定 $A_m=0$）．因为每个 $k_i>0$，由归纳假定可知每个 a_i 是系数取自 A_0 的 $x_1, \cdots, x_s$ 的多项式，因此 y 亦然．于是 $y \in A'$，$A_n \subseteq A'$，故得 $A=A'$．

ii)$\Longrightarrow$i)．由 Hilbert 基定理(7.6)立得． ■

设 A 是环(不是分次的)．$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想．我们可以作一个分次环 $A^*=\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n$．类似地，如果 M 是一个 A-模，M_n 是 M 的一个 $\mathfrak{a}$-滤链，则 $M^*=\bigoplus_{n=0}^{\infty} M_n$ 是一个分次 A^*-模，因为 $\mathfrak{a}^m M_n \subseteq M_{m+n}$．

如果 A 是 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是有限生成的，设由 $x_1, \cdots, x_r$ 生成，则 $A^*=A[x_1, \cdots, x_r]$，由(7.6)可知 A^* 是 Noether 环．

引理 10.8. A 是 Noether 环，M 是有限生成的 A-模，(M_n) 是 M 的一个 $\mathfrak{a}$-滤链，则下述论断等价：

i) M^* 是有限生成 A^*-模；

ii) 滤链 (M_n) 是稳定的．

证明．每个 M_n 是有限生成的，因此每个 $Q_n=\bigoplus_{r=0}^{n} M_r$ 也是有限生成的．这是 M^* 的一个子群，但一般不一定是 A^*-子模．然而，由它生成一个 A^*-子模，即

$$M_n^*=M_0 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \mathfrak{a} M_n \oplus \mathfrak{a}^2 M_n \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}^r M_r \oplus \cdots,$$

因为 Q_n 作为 A-模是有限生成的，M_n^* 作为 A^*-模是有限生成的．M_n^* 作成一个升链，它的并是 M^*．因为 A^* 是 Noether 环，M^* 作为 A^*-模是有限生成的 $\Longleftrightarrow$ 这个升链有限，即 $M^*=M_n^*$．对某个 $n_0 \Longleftrightarrow M_{n_0+r}=\mathfrak{a}^r M_{n_0}$ 对一切 $r \geqslant 0 \Longleftrightarrow$ 这个滤链是稳定的． ■

命题 10.9. (Artin-Rees 引理)．设 A 是 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是 A

的一个理想，M是一个有限生成的 A-模，(M_n)是M的一个稳定$\mathfrak{a}$-滤链，设 M' 是M的一个子模，则 $M'\cap M_n$ 是 M' 的一个稳定 $\mathfrak{a}$-滤链.

证明. 我们有 $\mathfrak{a}(M'\cap M_n)\subseteq \mathfrak{a}M'\cap \mathfrak{a}M_n\subseteq M'\cap M_{n+1}$，因此 $(M'\cap M_n)$ 是一个 $\mathfrak{a}$-滤链. 因此它定义一个分次 A^*-模，它是 M^* 的子模并且是有限生成的(因 A^* 是 Noether 环). 于是可以应用(10.8). ■

取 $M_n=\mathfrak{a}^nM$ 我们得通常所称的 Artin-Rees 引理.

系理 10.10. 存在整数 k，使得

$$(\mathfrak{a}^nM)\cap M'=\mathfrak{a}^{n-k}((\mathfrak{a}^kM)\cap M')$$

对一切 $n\geqslant k$. ■

另一方面，综合(10.9)和基本引理(10.6)，我们得到真正有意思的结果.

定理 10.11. 设 A 是 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是一个理想，M是一个有限生成 A-模，M' 是M的一个子模，则滤链 $\mathfrak{a}^nM'$ 和 $(\mathfrak{a}^nM)\cap M'$ 具有有界差. 特别，M' 的 $\mathfrak{a}$-拓扑与由M的 $\mathfrak{a}$-拓扑所诱导出的拓扑相同. ■

注记. 本章我们将应用(10.11)中关于拓扑的后一部分，但是，下一章中，关于有界差的较强结果是需要的.

作为(10.11)的第一个应用，我们将它与(10.3)结合而得到重要的**完备化的正合性质**:

命题 10.12. 设

$$0\to M'\to M\to M''\to 0$$

是 Noether 环 A 上有限生成模的正合序列，$\mathfrak{a}$ 是 A 的理想，则 $\mathfrak{a}$-adic 完备化序列

$$0\to \hat{M}'\to \hat{M}\to \hat{M}''\to 0$$

是正合的. ■

由于有自然同态 $A\to\hat{A}$，我们可以将 $\hat{A}$ 看成 A-代数，而且到目前为止，对任一个 A-模M我们都能作一个 $\hat{A}$-模 $\hat{A}\otimes_A M$. 很自然地会问: 如何将它和 $\hat{A}$-模 $\hat{M}$ 作比较. 现在我们由 A-模同

态 $M \to \hat{M}$ 定义一个 $\hat{A}$-模同态:

$$\hat{A} \otimes_A M \to \hat{A} \otimes_A \hat{M} \to \hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{M} = \hat{M}.$$

一般对任意 A 和 M,这既非单也非满,但是,我们有

命题 10.13. 对任意环 A,如果M是有限生成的,则 $\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}$ 是满的. 如果更设A 是 Noether 环,则 $\hat{A} \otimes_A M \to \hat{M}$ 是一个同构.

证明. 用(10.3)或其他方法显然看出 $\mathfrak{a}$-adic 完备化与有限直和可以交换. 因此,如果 $F \cong A^n$ 我们有 $\hat{A} \otimes_A F \cong \hat{F}$. 现在假定$M$是有限生成的,则我们有一个正合序列:

$$0 \to N \to F \to M \to 0$$

这导出一个交换图表:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{A} \otimes_A N & \to & \hat{A} \otimes_A F & \to & \hat{A} \otimes_A M & \to & 0 \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \beta & & \downarrow \alpha & & \\ 0 \to \hat{N} & \to & \hat{F} & \xrightarrow{\delta} & \hat{M} & \to & 0 \end{array}$$

图中上面一行由(2.18)是正合的. 由(10.3) δ 是满的,由于β 是一同构,这蕴含着 α 是满的,这证明了命题的第一部分. 现设A是 Noether 环,则N也是有限生成的,于是 γ 是满的,由(10.12)下面一行是正合序列. 稍稍用一下图表追踪法可以证明 α 是单的,所以是一个同构. ■

命题(10.12)和(10.13)一起说明,当A是 Noether 环时,函子 $M \longmapsto \hat{A} \otimes_A M$ 在有限生成 A-模的范畴上是正合的. 如第二章所指出的那样这就证明了:

命题 10.14. 设A是一个 Noether 环,$\mathfrak{a}$ 是一个理想,$\hat{A}$ 是A的 $\mathfrak{a}$-adic 完备化,则 $\hat{A}$ 是平坦 A-代数. ■

注记. 对非有限生成模,函子 $M \longmapsto \hat{M}$ 不是正合的,较好的正合的函子是 $M \longmapsto \hat{A} \otimes_A M$,而对有限生成模这两个函子是相同的.

现在我们进一步更仔细地讨论环 $\hat{A}$. 首先有一些基本命题:

命题 10.15. 设A是 Noether 环,$\hat{A}$是它的 $\mathfrak{a}$-adic 完备化. 则

i) $\hat{\mathfrak{a}} = \hat{A}\mathfrak{a} \cong \hat{A} \otimes_A \mathfrak{a}$;

ii) $(\mathfrak{a}^n)^\wedge = (\hat{\mathfrak{a}})^n$;

iii) $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1} \cong \hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$;

iv) $\hat{\mathfrak{a}}$ 包含在 $\hat{A}$ 的大根中.

证明. 因 A 是 Noether 环, $\mathfrak{a}$ 是有限生成的.(10.13)说明映射

$$\hat{A} \otimes_A \mathfrak{a} \to \hat{\mathfrak{a}}$$

是一个同构,它的象是 $\hat{A}\mathfrak{a}$. 这就证明了 i). 现在将 i) 用到 $\mathfrak{a}^n$ 上,我们得出

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}^n)^\wedge = \hat{A}\mathfrak{a}^n &= (\hat{A}\mathfrak{a})^n && \text{由 } (1.18) \\ &= (\hat{\mathfrak{a}})^n && \text{由 i)}.\end{aligned}$$

利用(10.4)我们又得出

$$A/\mathfrak{a}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{a}}^n.$$

由此式取商环得到 iii). 由 ii) 及 (10.5) 可知 $\hat{A}$ 对于它的 $\hat{\mathfrak{a}}$-拓扑是完备的. 因此对任意 $x \in \hat{\mathfrak{a}}$

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

在 $\hat{A}$ 中收敛,故 $1 - x$ 是可逆元. 由 (1.9) 这就说明了 $\hat{\mathfrak{a}}$ 包含在 $\hat{A}$ 的大根中. ■

命题 10.16. 设 A 是 Noether 局部环, $\mathfrak{m}$ 是它的极大理想,则 A 的 $\mathfrak{m}$ — adic 完备化 $\hat{A}$ 是局部环,其极大理想是 $\hat{\mathfrak{m}}$.

证明. 由 (10.15) iii) 我们有 $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m}$, 因此 $\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}$ 是域, $\hat{\mathfrak{m}}$ 是极大理想. 由 (10.15) iv) 得 $\hat{\mathfrak{m}}$ 是 $\hat{A}$ 的大根, 因此是唯一的极大理想. 这样 $\hat{A}$ 是局部环. ■

一个重要问题是在完备化时我们失去的有多少, Krull 定理回答了这个问题.

定理 10.17 设 A 是 Noether 环, $\mathfrak{a}$ 是一个理想, M 是有限生成 A-模, $\hat{M}$ 是 M 的 $\mathfrak{a}$-完备化,则 $M \to \hat{M}$ 的核 $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M$ 由 M 中被 $1 + \mathfrak{a}$ 中某元素所零化的那些元素 x 组成.

证明. 因 E 是 $0 \in M$ 的一切邻域的交, 故在 E 上诱导的拓扑是平凡的,即 E 是 $0 \in E$ 的仅有的邻域. 由 (10.11) E 的诱导拓扑与它的 $\mathfrak{a}$-拓扑相同. 因 $\mathfrak{a}E$ 是 E 的 $\mathfrak{a}$-拓扑的一个邻域,于是

$\mathfrak{a}E = E$. 由于M是有限生成模而A是 Noether 环，E也是有限生成的，所以我们可以利用(2.5)由 $\mathfrak{a}E = E$ 导出 $(1-\alpha)E = 0$ 对某个 $\alpha \in \mathfrak{a}$. 相反的一面是显然的：如果 $(1-\alpha)x = 0$，则

$$x = \alpha x = \alpha^2 x = \cdots \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = E. \qquad \blacksquare$$

注记. 1) 设S是乘法封闭集 $1+\mathfrak{a}$，则(10.17)断言

$$A \to \hat{A} \quad 和 \quad A \to S^{-1}A$$

有相同的核，又对任意 $\alpha \in \hat{\mathfrak{a}}$

$$(1-\alpha)^{-1} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots$$

在 $\hat{A}$ 中收敛，因此S中每个元素成为 $\hat{A}$ 中可逆元. 由 $S^{-1}A$ 的泛性质这意味着存在自然同态 $S^{-1}A \to \hat{A}$，由(10.17)可得这同态是单的. 这样 $S^{-1}A$ 可与 $\hat{A}$ 的一个子环等同.

2) 当A不是 Noether 环时，Krull 定理可能不成立. 设A是实数直线上所有 C^{∞} 函数所组成的环，$\mathfrak{a}$ 是所有在原点为 0 的 f 构成的理想（$\mathfrak{a}$ 是极大的，因为 $A/\mathfrak{a} \cong R$）. 事实上 $\mathfrak{a}$ 由恒等函数 x 生成，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n$是 A 中那些微商在原点为 0 的函数 f 作成的集合. 另一方面，f 被某个元素 $1+\alpha(\alpha \in \mathfrak{a})$ 所零化当且仅当 f 在 0 的某个邻域中都为0. 熟知的函数 $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 在 0 附近是不为 0 的，但在 0 点微商为 0，这说明

$$A \to \hat{A} \quad 和 \quad A \to S^{-1}A \quad (S = 1 + \mathfrak{a})$$

的核不重合. 这样A不是 Noether 环.

Krull 定理有很多推论.

系理 10.18. 设A是 Noether 整环，$\mathfrak{a} \neq (1)$ 是 A 的一个理想，则 $\bigcap \mathfrak{a}^n = 0$.

证明. $1+\mathfrak{a}$ 中不包含零因子. $\blacksquare$

系理 10.19. A是 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是A的一个包含在大根中的理想. M是有限生成 A-模，则M的 $\mathfrak{a}$-拓扑是 Hausdorff 拓扑，即 $\bigcap \mathfrak{a}^n M = 0$.

证明. 由(1.9) $1+\mathfrak{a}$ 的每个元素都是可逆元. $\blacksquare$

作为(10.19)的一个特别重要的特殊情形，我们有：

系理 10.20. 设 A 是 Noether 局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想，M 是有限生成 A-模，则M的 $\mathfrak{m}$-拓扑是 Hausdorff 拓扑，特别 A 的 $\mathfrak{m}$-拓扑是 Hausdorff 拓扑. ■

如果我们回忆一下 A 中的一个 $\mathfrak{m}$-准素理想恰是包在 $\mathfrak{m}$ 和某个幂 $\mathfrak{m}^n$ 中间的任一理想(用(4.2)和(7.14))，则我们能够稍微不同地重述一下(10.20). 于是(10.20)蕴含着 A 中一切 $\mathfrak{m}$-准素理想之交为0. 现在如果 A 是任一 Noether 环，$\mathfrak{p}$ 是一个素理想，我们能够将(10.20)的这个形式用到局部环 $A_\mathfrak{p}$ 上. 再回到 A，利用 A 中 $\mathfrak{p}$-准素理想和 $A_\mathfrak{p}$ 中 $\mathfrak{m}$-准素理想 ($\mathfrak{m}=\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$) 的一一对应关系(4.8)，我们得到：

系理 10.21. 设 A 是 Noether 环，$\mathfrak{p}$ 是 A 的一个素理想，则 A 的所有 $\mathfrak{p}$-准素理想之交是 $A\to A_\mathfrak{p}$ 的核. ■

相伴的分次环

设 A 是一个环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想. 定义

$$G(A)(=G_\mathfrak{a}(A))=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}\qquad(\mathfrak{a}^0=A).$$

这是一个分次环，其中乘法定义如下：

对于每个 $x_n\in\mathfrak{a}^n$，令 $\bar{x}_n$ 记 x_n 在 $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ 中的象；定义 $\bar{x}_m\bar{x}_n$ 为 $\overline{x_mx_n}$，即 x_mx_n 在 $\mathfrak{a}^{m+n}/\mathfrak{a}^{m+n+1}$ 中的象，可验证 $\bar{x}_m\bar{x}_n$ 不依赖于特殊代表元的选取.

类似地，若M是一个 A-模，(M_n) 是M的一个 $\mathfrak{a}$-滤链，定义

$$G(M)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}M_n/M_{n+1}$$

它是用自然方式定义的分次 $G(A)$模. 以 $G_n(M)$记 M_n/M_{n+1}.

命题 10.22. 设 A 是一个 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，则

i) $G_\mathfrak{a}(A)$ 是 Noether 环；

ii) $G_\mathfrak{a}(A)$ 和 $G_\mathfrak{a}(\hat{A})$ 作为分次环是同构的；

iii) 若M是一个有限生成 A-模，(M_n) 是M的一个稳定 $\mathfrak{a}$-滤链，则 $G(M)$ 是有限生成分次 $G_{\mathfrak{a}}(A)$-模.

证明. i) 因A是 Noether 环，故$\mathfrak{a}$是有限生成的，设由 $x_1,\cdots,x_s$ 生成. 设 $\bar{x}_i$ 是 x_i 在 $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ 中的象，则 $G(A)=(A/\mathfrak{a})[\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_s]$. 因 $A/\mathfrak{a}$ 是 Noether 环，由 Hilbert 基定理可知 $G(A)$ 是 Noether 环.

ii) 由(10.15) iii) 有 $\mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}\cong\hat{\mathfrak{a}}^n/\hat{\mathfrak{a}}^{n+1}$.

iii) 存在 n_0，使得 $M_{n_0+r}=\mathfrak{a}^r M_{n_0}$ 对一切 $r\geqslant 0$，因此 $G(M)$ 由 $\bigoplus\limits_{n\leqslant n_0}G_n(M)$ 生成. 每个 $G_n(M)=M_n/M_{n+1}$ 是 Noether 环且被$\mathfrak{a}$所零化，故是有限生成 $A/\mathfrak{a}$-模，因此 $\bigoplus\limits_{n\leqslant n_0}G_n(M)$ (作为一个 $A/\mathfrak{a}$-模)就由有限个元素生成，因此 $G(M)$ 作为 $G(A)$-模也是有限生成的. ■

本章最后一个主要结果是一个 Noether 环的 $\mathfrak{a}$-adic 完备化仍是 Noether 环. 在着手证明之前我们需要一个简单的引理，它把任一滤链群的完备化和相伴分次群的完备化联系起来.

引理 10.23. 设 $\phi: A\to B$ 是一个滤链群同态，即 $\phi(A_n)\subseteq B_n$，又设 $G(\phi): G(A)\to G(B)$ 及 $\hat{\phi}: \hat{A}\to\hat{B}$ 是相伴分次群和完备化群的诱导同态，则

i) $G(\phi)$ 单 $\Longrightarrow\hat{\phi}$ 单；

ii) $G(\phi)$ 满 $\Longrightarrow\hat{\phi}$ 满.

证明. 研究正合序列的交换图表.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & A_n/A_{n+1} & \to & A/A_{n+1} & \to & A/A_n & \to 0\\
 & \downarrow{\scriptstyle G_n(\phi)} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & \\
0\to & B_n/B_{n+1} & \to & B/B_{n+1} & \to & B/B_n & \to 0
\end{array}$$

这给出正合序列

$$0\to\operatorname{Ker}G_n(\phi)\to\operatorname{Ker}\alpha_{n+1}\to\operatorname{Ker}\alpha_n\to\operatorname{Coker}G_n(\phi)$$
$$\to\operatorname{Coker}\alpha_{n+1}\to\operatorname{Coker}\alpha_n\to 0.$$

由这个序列，对 n 作归纳我们看出在情形 i) 有 $\operatorname{Ker}\alpha_n=0$，在情形 ii) 有 $\operatorname{Coker}\alpha_n=0$. 更进一步在情形 ii) 我们还有

$\operatorname{Ker}\alpha_{n+1}\to\operatorname{Ker}\alpha_n$ 是满的．取同态 α_n 的反向极限并应用(10.2)就得到了这个引理． ■

现在我们能得出作为(10.22)的部分逆的一个结果，这是在证明 $\hat{A}$ 是 Noether 环中的主要步骤．

命题 10.24. 设 A 是环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，M 是一个 A-模，(M_n) 是 M 的一个 $\mathfrak{a}$-滤链．假定 A 在 $\mathfrak{a}$-拓扑下完备，M 在它的滤链拓扑下是 Hausdorff 的(即 $\bigcap_n M_n=0$)．又设 $G(M)$ 是一有限生成 $G(A)$-模，则 M 是有限生成 A-模．

证明． 取 $G(M)$ 的一个有限生成元集合，并将它分成齐次分量，设为 $\xi_i\ (1\leqslant i\leqslant\nu)$，其中 ξ_i 的次数设为 $n(i)$，故可设它是 $x_i\in M_{n(i)}$ 的象．设 F^i 是具有一稳定 $\mathfrak{a}$-滤链的模 A，这个 $\mathfrak{a}$-滤链由 $F_k^i=\mathfrak{a}^{k+n(i)}$ 给出，令 $F=\bigoplus_{i=1}^{r}F^i$．那么将每个 F^i 中生成元 1 映为 x_i 的映射定义一滤链群同态

$$\phi:\ F\to M.$$

而

$$G(\phi):\ G(F)\to G(M)$$

是 $G(A)$-模同态．由构成法知它是满映射，因此由 (10.23) ii) $\hat{\phi}$ 是满映射．现在研究图表

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{\ \phi\ } & M \\
{\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\
\hat{F} & \xrightarrow{\ \hat{\phi}\ } & \hat{M}
\end{array}$$

因为 F 是自由的，$A=\hat{A}$，故 α 是同构． 因 M 是 Hausdorff 的，故 β 是单的． 这样 $\hat{\phi}$ 满蕴含着 ϕ 是满的，这就意味着 M 作为 A-模由 $x_1,\cdots,x_r$ 生成． ■

系理 10.25. 在 (10.24) 假定之下，如果 $G(M)$ 是 Noether $G(A)$-模，则 M 是 Noether A-模．

证明． 由 (6.2) 我们必须证明 M 的每个子模 M' 是有限生成的．设 $M'_n=M'\cap M_n$，则 (M'_n) 是 M' 的 $\mathfrak{a}$-滤链，而嵌入映射

$M'_n \to M_n$ 给出一个单同态 $M'_n/M'_{n+1} \to M_n/M_{n+1}$，因此给出一个 $G(M')$ 到 $G(M)$ 的嵌入映射．因为 $G(M)$ 是 Noether 环，$G(M')$ 是有限生成的(由(6.2))；同时因为 $\cap M'_n \subseteq \cap M_n = 0$，$M'$ 是 Hausdorff 的，于是由 (10.24) M' 是有限生成的． ■

现在我们可以导出我们所希望的结果：

定理 10.26. 如果 A 是一个 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，则 A 的 $\mathfrak{a}$-完备化 $\hat{A}$ 是 Noether 环．

证明．由(10.22)我们知道

$$G_{\mathfrak{a}}(A) = G_{\hat{\mathfrak{a}}}(\hat{A})$$

是 Noether 环．应用(10.25)到完备环 $\hat{A}$ 上，取 $M = \hat{A}$ (用 $\hat{\mathfrak{a}}^n$ 作滤链，因此是 Hausdorff 的)即可． ■

系理 10.27. 如果 A 是一 Noether 环，则 n 变元幂级数环 $B = A[[x_1, \cdots, x_n]]$ 是 Noether 环，特别，$k[[x_1, \cdots, x_n]]$ 是 Noether 环(k 是域)．

证明．由 Hilbert 基定理，$A[x_1, \cdots, x_n]$ 是 Noether 环，B 是它对 $(x_1, \cdots, x_n)$-adic 拓扑的完备化． ■

习　　题

1. 设 α_n: $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ 是由 $\alpha_n(1) = p^{n-1}$ 给出的交换群的单映射，设 α: $A \to B$ 是所有 α_n 的直和 (A 是可数个同一 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 的直和，B 是 $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ 的直和)．证明 A 的 p-adic 完备化恰是 A，而 A 相对于从 B 上 p-adic 拓扑所诱导的拓扑的完备化是 $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ 的直乘积．证明 p-adic 完备化对于所有 $\mathbf{Z}$-模的范畴而言不是右正合函子．
2. 在习题 1 中，设 $A_n = \alpha^{-1}(p^n B)$，并研究正合序列
$$0 \to A_n \to A \to A/A_n \to 0.$$
证明 $\varprojlim$ 不是右正合的，并计算 $\varprojlim{}^1 A_n$．
3. 设 A 是 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是一个理想，M 是一个有限生成 A-模，用 Krull 定理及第三章习题 14 证明

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = \bigcap_{\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}} \operatorname{Ker}(M \to M_{\mathfrak{m}}),$$

其中 $\mathfrak{m}$ 跑过包有 $\mathfrak{a}$ 的一切极大理想.

证明

$$\hat{M} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Supp}(M) \cap V(\mathfrak{a}) = \phi \text{（在 } \operatorname{Spec}(A) \text{中）}.$$

[读者可将 $\hat{M}$ 想成 M 的通过子概型 $V(\mathfrak{a})$ 的“Taylor 展开”，上述结果则表明M在 $V(\mathfrak{a})$ 的一个邻域中由它的 Taylor 展开而决定.]

4. 设A是 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是A的一个理想，$\hat{A}$ 是 $\mathfrak{a}$-adic 完备化. 对任意 $x \in A$，设 $\hat{x}$ 是 x 在 $\hat{A}$ 中的象. 证明

$$x \text{ 不是 } A \text{ 中零因子} \Longrightarrow \hat{x} \text{ 不是 } \hat{A} \text{ 中零因子}.$$

这是否蕴含着

$$A \text{ 是整环} \Longrightarrow \hat{A} \text{ 是整环?}$$

[对序列 $0 \to A \xrightarrow{x} A$ 应用完备化的正合性.]

5. 设A是 Noether 环，并设 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 是A的理想. 如果M是任一 A-模，设 $M^{\mathfrak{a}}$ 和 $M^{\mathfrak{b}}$ 分别表示它的 $\mathfrak{a}$-adic 和 $\mathfrak{b}$-adic 完备化. 如果M是有限生成的，证明 $(M^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}} = M^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$.

[取正合序列

$$0 \to \mathfrak{b}^m M \to M / \mathfrak{b}^m M \to 0$$

的 $\mathfrak{a}$-adic 完备化，并应用(10.13). 然后利用同构

$$\varprojlim_m \left(\varprojlim_n M / (\mathfrak{a}^n M + \mathfrak{b}^m M) \right) \cong \varprojlim_n M / \mathfrak{a}^n M + \mathfrak{b}^n M$$

及包含关系

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{2n} \subseteq \mathfrak{a}^n + \mathfrak{b}^n \subseteq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^n.]$$

6. 设A是 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是A中一个理想. 证明 $\mathfrak{a}$ 包含在A的大根中当且仅当 A 中每个极大理想对于 $\mathfrak{a}$-拓扑是闭的. （一个 Noether 拓扑环，若其中拓扑由包含在大根中的一个理想所定义，这种环叫做 **Zariski 环**，例子有局部环及 $\mathfrak{a}$-adic 完备化(由(10.25) iv) 可知.）

7. 设A是一个 Noether 环，$\mathfrak{a}$ 是A中一个理想，$\hat{A}$ 是 $\mathfrak{a}$-adic 完备

化. 证明 $\hat{A}$ 在 A 上是忠实平坦的(见第三章, 习题 16)当且仅当 A 对于 $\mathfrak{a}$-拓扑是 Zariski 环.

[因 $\hat{A}$ 在 A 上平坦,只要证明

$M \to \hat{M}$ 是满映射,对一切有限生成模 $M \Longleftrightarrow A$ 是 Zariski 环. 利用(10.19)及习题 6.]

8. A 是 C^n 中原点的局部环(即所有有理函数 $f/g \in C(z_1, \cdots, z_n)$ 而 $g(0) \neq 0$ 构成的环),设 B 是在原点的某个邻域中收敛的 $z_1, \cdots, z_n$ 的幂级数构成的环. C 是 $z_1, \cdots, z_n$ 的形式幂级数环,于是 $A \subset B \subset C$. 证明 B 是局部环,而它相对于极大理想拓扑的完备化是 C. 假设 B 是 Noether 环,证明 B 是 A-平坦的. [应用第三章,习题 17 和上面的习题 7.]

9. 设 A 是局部环, $\mathfrak{m}$ 是它的极大理想. 假设 A 是 $\mathfrak{m}$-adic 完备的. 对任一多项式 $f(x) \in A[x]$, 设 $\bar{f}(x) \in (A/\mathfrak{m})[x]$ 记其 mod$\mathfrak{m}$ 的同余类. 证明 **Hensel 引理**: 设 $f(x)$ 首项系数为 1,次数为 n, 并设存在互素的首项系数为 1 的多项式 $\bar{g}(x)$, $\bar{h}(x) \in (A/\mathfrak{m})[x]$, 次数分别是 $r, n-r$, 使得 $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)\bar{h}(x)$, 则我们可将 $\bar{g}(x), \bar{h}(x)$ 提升回到首项系数为 1 的多项式 $g(x), h(x) \in A[x]$, 使得 $f(x) = g(x)h(x)$.

[假设我们归纳地已造出 $g_k(x)$, $h_k(x) \in A[x]$ 使得 $g_k(x)h_k(x) - f(x) \in \mathfrak{m}^k A[x]$, 则利用 $\bar{g}(x)$ 和 $\bar{h}(x)$ 互素这个事实, 我们可以找到 $\bar{a}_p(x)$, $\bar{b}_p(x)$, 次数分别 $\leqslant n-r$, r, 使得 $x^p = \bar{a}_p(x)\bar{g}_k(x) + \bar{b}_p(x)\bar{h}_k(x)$, p 是适合 $1 \leqslant p \leqslant n$ 的整数, 最后利用 A 的完备性去证明序列 $g_k(x)$, $h_k(x)$ 收敛于所要求的 $g(x)$, $h(x)$.]

10. i) 沿用习题 9 的记号,从 Hensel 引理推出: 如果 $\bar{f}(x)$ 有一个单根 $\alpha \in A/\mathfrak{m}$, 则 $f(x)$ 有一个单根 $a \in A$, 使得 $\alpha = a$, mod $\mathfrak{m}$.

ii) 证明 2 是 7-adic 整数环中的平方元.

iii) 设 $f(x, y) \in k[x, y]$, k 是域, 并设 $f(0, y)$ 以 $y = a_0$ 为单根,证明存在形式幂级数

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \quad 使得 \quad f(x,y(x))=0.$$

（这给出曲线 $f=0$ 通过点 $(0, a_0)$ 的"解析支 (analytic branch)".）

11. 证明(10.26)的逆是不成立的，甚至我们假设 A 是局部环且 $\hat{A}$ 是有限生成 A-模也不成立.

[取 A 是 x 的一切 C^∞ 函数在 $x=0$ 的芽 (germ) 组成的环，并应用 Borel 定理：每个形式幂级数可作为某个 C^∞ 函数的 Taylor 展开.]

12. A 是 Noether 环，则 $A[[x_1,\cdots,x_n]]$ 是忠实平坦 A-代数. [将 $A\to A[[x_1,\cdots,x_n]]$ 表为平坦扩张的合成，并应用第一章习题 5 (V).]

第十一章 维数理论

簇的维数是代数几何中一个基本概念．它本质上是一个局部概念．在这一章我们将指出，对于一般 Noether 局部环，有着十分令人满意的维数理论．主要定理给出了关于维数的三个不同定义的等价性．其中二个定义有十分明显的几何内容，而包含 Hilbert 函数的第三个定义是比较形式的．但是，它有许多技术上的方便，如果较早地把它引进，整个理论就变得比较精简了．

在讨论过维数之后，我们简略地叙述一下正则局部环，它与代数几何中非奇异的概念相对应，我们将确定正则性的三个定义的等价性．

最后指出，对于域上的代数簇，我们定义的局部维数怎样与函数域的超越次数一致．

Hilbert 函数

令 $A=\bigoplus_{n=0}^{\infty}A_n$ 是 Noether 分次环．由(10.7)，A_0 是 Noether 环，而且 A（作为 A_0-代数）是有限生成的，我们可以取生成元 $x_1,\cdots,x_s$ 是齐次的，次数分别为 $k_1,\cdots,k_s$（都大于 0）．

令 M 是有限生成分次 A-模．那么 M 由有限个齐次元素，譬如说 m_j $(1\leqslant j\leqslant t)$ 生成；令 $r_j=\deg m_j$．M_n 的每个元素，即 M 的 n 次齐次分量，具有形式 $\sum_j f_j(x)m_j$，其中 $f_j(x)\in A$ 是 $n-r_j$ 次齐次的（如果 $n<r_j$ 是零）．由此得出，M_n 作为 A_0-模是有限生成的，即它由所有 $g_j(x)m_j$ 生成，这里 $g_j(x)$ 是 x_i 的单项式，总次数为 $n-r_j$．

令 λ 是定义在所有的有限生成 A_0-模上的一个**加性函数**（在

$\mathbf{Z}$ 中取值). M(相对于 λ) 的 **Poincaré 级数**指的是 $\lambda(M_n)$ 的生成函数,即它是幂级数

$$P(M,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M_n)t^n\in\mathbf{Z}[[t]].$$

定理 11.1. (Hilbert, Serre). $P(M,t)$ 是 t 的形如

$$f(t)\Big/\prod_{i=1}^{s}(1-t^{k_i})$$

的有理函数,其中 $f(t)\in\mathbf{Z}[t]$.

证明. 对 A 在 A_0 上的生成元的个数 s 作归纳法. 由 $s=0$ 出发; 这意味着 $A_n=0$ 对所有 $n>0$, 所以 $A=A_0$, 而M是有限生成 A_0-模,因此对所有足够大的 n, $M_n=0$. 于是,在这情况下, $P(M,t)$ 是多项式.

现在假设 $s>0$, 定理对 $s-1$ 成立. 将 M_n 的每个元素乘以 x_s 定义了从 M_n 到 M_{n+k_s} 之中的一个 A_0*) 模同态,因此它给出一个正合序列

$$0\to K_n\to M_n\xrightarrow{x_s}M_{n+k_s}\to L_{n+k_s}\to 0. \tag{1}$$

令 $K=\bigoplus_n K_n$, $L=\bigoplus_n L_n$; 这是两个有限生成 A-模 (因为K是 M 的子模, L是 M 的商模), 它们都被 x_s 所零化,因此它们是 $A_0[x_1,\cdots,x_{s-1}]$-模. 对(1)应用 λ,由(2.11)我们有

$$\lambda(K_n)-\lambda(M_n)+\lambda(M_{n+k_s})-\lambda(L_{n+k_s})=0;$$

乘以 t^{n+k_s} 并对 n 求和,我们得到

$$(1-t^{k_s})P(M,t)=P(L,t)-t^{k_s}P(K,t)tg(t), \tag{2}$$

其中 $g(t)$ 是多项式. 应用归纳假设,命题即得证. ■

我们用 $d(M)$ 表示 $P(M,t)$ 在 $t=1$ 的极点的阶. 它提供了M(相对于 λ) 的"大小"的一个度量. 特别 $d(A)$被定义. 所有的 $k_i=1$ 的情况特别简单:

系理 11.2. 如果每个 $k_i=1$, 那么对所有足够大的 n,

---

*) 原书中此处是 A.——译者注

$\lambda(M_n)$ 是 n 的 $d-1$ 次[1](具有有理系数)的多项式.

证明. 由 (11.1),我们有 $\lambda(M_n)=f(t)(1-t)^{-s}$ 中 t^n 的系数. 消去 $(1-t)$ 的幂,我们可以假设 $s=d$ 和 $f(1)\neq 0$. 假设 $f(t)=\sum_{k=0}^{N}a_kt^k$; 由于

$$(1-t)^{-d}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{d+k-1}{d-1}t^k,$$

我们有

$$\lambda(M_n)=\sum_{k=0}^{N}a_k\binom{d+n-k-1}{d-1}, \text{ 对所有 } n\geqslant N.$$

右边的和是 n 的多项式,首项 $(\Sigma a_k)n^{d-1}/(d-1)!\neq 0$. ■

注记. 1) 一个多项式 $f(x)$ 可以对所有整数 n 来说 $f(n)$ 都是整数,而 f 不一定具有整系数. 例如, $\frac{1}{2}x(x+1)$.

2) 在(11.2)中的多项式通常叫作M(相对于 λ) 的 Hilbert 函数(或多项式).

现在回到序列 (1). 让我们用不是M中的零因子的任一元素 $x\in A_k$ (即, $xm=0, m\in M\Longrightarrow m=0$) 来代替 x_s, 那么 $K=0$, 方程 (2) 指出

$$d(L)=d(M)-1.$$

因此我们证明了

命题 11.3. 如果 $x\in A_k$ 不是 M 中的零因子, 那么 $d(M/xM)=d(M)-1$. ■

我们将在 A_0 是 Artin 环(特别,是域)和 $\lambda(M)$ 是有限生成 A_0-模M的**长度** $l(M)$ 的情况下使用(11.1). 根据(6.9), $l(M)$是加性的.

例. 令 $A=A_0[x_1,\cdots,x_s]$, 其中 A_0是 Artin 环, x_i 是无

---

1) 这里我们约定,零多项式的次数是 -1, 二项式系数 $\binom{n}{-1}=0$ 对 $n\geqslant 0$, $\binom{n}{-1}=1$ 对 $n=-1$.

关未定元．那么 A_n 是由单项式 $x_1^{m_1}\cdots x_s^{m_s}$，这里 $\Sigma m_i=n$，生成的自由 A_0-模，这里单项式总共有 $\binom{s+n-1}{s-1}$ 个，因此 $P(A,t)$*) $=(1-t)^{-s}l(A_0)$.

现在，我们用第十章中的办法，通过过渡到相伴分次环来讨论由局部环得到的 Hilbert 函数.

命题 11.4. 令 A 是 Noether 局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想，$\mathfrak{q}$ 是一个 $\mathfrak{m}$-准素理想，M 是有限生成 A-模，(M_n) 是 M 的一个稳定的滤链．那么

i) 对每个 $n\geqslant 0$，M/M_n 有有限长度；

ii) 对所有充分大的 n，这个长度是 n 的一个多项式 $g(n)$，次数 $\leqslant s$，s 是 $\mathfrak{q}$ 的生成元的最小个数.

iii) $g(n)$ 的次数和首项系数只依赖于 M 和 $\mathfrak{q}$，不依赖于滤链的选择.

证明．i) 令 $G(A)=\bigoplus_n \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$，$G(M)=\bigoplus_n M_n/M_{n+1}$. 根据 (8.5)，$G_0(A)=A/\mathfrak{q}$ 是 Artin 局部环；$G(A)$ 是 Noether 环，$G(M)$ 是有限生成分次 $G(A)$-模 (10.22)．每个 $G_n(M)=M_n/M_{n+1}$ 是被 $\mathfrak{q}$ 所零化的 Noether A-模，因此是 Noether $A/\mathfrak{q}$-模，于是有有限长度(由于 $A/\mathfrak{q}$ 是 Artin 环)．于是 M/M_n 有有限长度而

$$l_n=l(M/M_n)=\sum_{r=1}^{n}l(M_{r-1}/M_r). \tag{1}$$

ii) 如果 $x_1,\cdots,x_s$ 生成 $\mathfrak{q}$，那么 $G(A)$ 作为 $A/\mathfrak{q}$-代数由 x_i 在 $\mathfrak{q}/\mathfrak{q}^2$ 中的象 $\bar{x}_i$ 生成，而每个 $\bar{x}_i$ 的次数为 1．由 (11.2) 我们有 $l(M_n/M_{n+1})=f(n)$，对所有大的 n，而 $f(n)$ 是 n 的次数 $\leqslant s-1$ 的多项式，由 (1) 我们有 $l_{n+1}-l_n=f(n)$，由此得出，对所有大的 n，l_n 是一个次数 $\leqslant s$ 的多项式 $g(n)$.

iii) 令 $(\tilde{M}_n)$ 是 M 的另一个稳定的 $\mathfrak{q}$-滤链，$\tilde{g}(n)=l(M/\tilde{M}_n)$.

---

*) 原书中 $P(A,t)=(1-t)^{-s}$.——译者注

由(10.6)这两个滤链有有界差，即存在一个整数 n_0，使得 $M_{n+n_0}\subseteq \widetilde{M}_n$，$\widetilde{M}_{n+n_0}\subseteq M_n$ 对所有 $n\geqslant 0$；从而我们有 $g(n+n_0)\geqslant \tilde{g}(n)$，$\tilde{g}(n+n_0)\geqslant g(n)$. 由于对所有大的 n，g 和 $\tilde{g}$ 是多项式，我们有 $\lim\limits_{n\to\infty} g(n)/\tilde{g}(n)=1$，所以 g，$\tilde{g}$ 有相同的次数和首项系数. ■

和滤链 $(\mathfrak{q}^n M)$ 相应的多项式 $g(n)$ 用 $\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)$ 表示：

$$\chi_{\mathfrak{q}}^M(n)=l(M/\mathfrak{q}^n M)\qquad（对所有大的 n）.$$

如果 $M=A$，我们用 $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$ 表示 $\chi_{\mathfrak{q}}^A(n)$，并把 $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$ 叫作 $\mathfrak{m}$–准素理想 $\mathfrak{q}$ 的**特征多项式**. 在这情况下，(11.4) 给出

系理 11.5. 对所有大的 n，长度 $l(A/\mathfrak{q}^n)$ 是次数 $\leqslant s$ 的一个多项式 $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$，这里 s 是 $\mathfrak{q}$ 的生成元的最小个数. ■

下边的命题指出，多项式 $\chi_{\mathfrak{q}}(n)$ 对于 $\mathfrak{m}$–准素理想 $\mathfrak{q}$ 的不同选取都有相同的次数.

命题 11.6. 如果 A，$\mathfrak{m}$，$\mathfrak{q}$ 是如上面所给出的，那么

$$\deg\chi_{\mathfrak{q}}(n)=\deg\chi_{\mathfrak{m}}(n).$$

证明. 根据 (7.16)，对某个 r 我们有 $\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{q}\supseteq\mathfrak{m}^r$，因此 $\mathfrak{m}^n\supseteq\mathfrak{q}^n\supseteq\mathfrak{m}^{rn}$，于是

$$\chi_{\mathfrak{m}}(n)\leqslant\chi_{\mathfrak{q}}(n)\leqslant\chi_{\mathfrak{m}}(rn)\qquad 对所有大的 n.$$

现在让 $n\to\infty$，注意 χ 是 n 的多项式. ■

$\chi_{\mathfrak{q}}(n)$ 的公共次数用 $d(A)$ 表示：鉴于(11.2)，这意味着我们置 $d(A)=d(G_{\mathfrak{m}}(A))$，其中 $d(G_{\mathfrak{m}}(A))$ 是用 $G_{\mathfrak{m}}(A)$ 的 Hilbert 函数在 $t=1$ 的极点的阶所确定的整数.

Noether 局部环的维数理论

令 A 是 Noether 局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想.

令 $\delta(A)=A$ 的 $\mathfrak{m}$–准素理想的生成元的最小个数. 我们的目的是要证明 $\delta(A)=d(A)=\dim(A)$. 我们将通过证明 $\delta(A)\geqslant d(A)\geqslant\dim(A)\geqslant\delta(A)$ 来达到这一点，(11.5) 和 (11.6)一起提供了这个链的第一个环节.

命题 11.7. $\delta(A) \geqslant d(A)$. ■

下边我们对局部环证明一个类似于(11.3)的命题. 注意，这个证明使用 Artin-Rees 引理的强形式(不只是拓扑部分).

命题 11.8. 令 A, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{q}$ 如前. 再令 M 是有限生成 A-模，$x \in A$ 是M中的非零因子而 $M' = M/xM$. 那么

$$\deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M'} \leqslant \deg \chi_{\mathfrak{q}}^{M} - 1.$$

证明. 令 $N = xM$; 那么根据对 x 所作的假设，M和N作为A模有 $N \cong M$. 令 $N_n = N \cap \mathfrak{q}^n M$. 于是我们有正合序列

$$0 \to N/N_n \to M/\mathfrak{q}^n M \to M'/\mathfrak{q}^n M' \to 0.$$

因此,如果 $g(n) = l(N/N_n)$，我们有

$$g(n) - \chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n) + \chi_{\mathfrak{q}}^{M'}(n) = 0$$

对所有大的 n. 现在根据 Artin-Rees 引理(10.9)，(N_n) 是N的一个稳定的 $\mathfrak{q}$-滤链. 因此 $N \cong M$，由(11.4) iii) 推出 $g(n)$ 和 $\chi_{\mathfrak{q}}^{M}(n)$有相同的首项;于是命题成立. ■

系理 11.9. 如果A是 Noether 局部环，x是A中的非零因子,那么 $d(A/(x)) \leqslant d(A) - 1$.

证明. 在(11.8)中,令 $M = A$. ■

现在我们可以证明决定性的结果:

命题11.10. $d(A) \geqslant \dim A$.

证明. 对 $d = d(A)$ 作归纳法. 如果 $d = 0$，那么对所有大的 n，$l(A/\mathfrak{m}^n)$ 是常数,于是对某个 n,$\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$,由 Nakayama 引理(2.6)，$\mathfrak{m}^n = 0$. 因此$A$是 Artin 环而 $\dim A = 0$.

假设 $d > 0$，令 $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r$ 是A中的任何一个素理想链. 再令 $x \in \mathfrak{p}_1$，$x \notin \mathfrak{p}_0$ 和 $A' = A/\mathfrak{p}_0$，x' 是x在A'中的象. 那么 $x' \neq 0$，A' 是整环. 由(11.9)我们有

$$d(A'/(x')) \leqslant d(A') - 1.$$

如果 $\mathfrak{m}'$ 是A'的极大理想，$A'/\mathfrak{m}'^n$ 是 $A/\mathfrak{m}^n$ 的同态象，因此 $l(A/\mathfrak{m}^n) \geqslant l(A'/\mathfrak{m}'^n)$，于是 $d(A) \geqslant d(A')$. 从而

$$d(A'/(x')) \leqslant d(A) - 1 = d - 1.$$

因此由归纳假设，$A'/(x')$ 中的任何素理想链的长度 $\leqslant d - 1$. 但

是，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ 在 $A'/(x')$ 中的象形成一个长度为 $r-1$ 的链，因此 $r-1 \leqslant d-1$，从而 $r \leqslant d$. 于是 $\dim A \leqslant d$. ■

系理 11.11. 如果 A 是 Noether 局部环，那么 $\dim A$ 是有限的. ■

如果 A 是任何环，$\mathfrak{p}$ 是 A 中的素理想，那么 $\mathfrak{p}$ 的**高度**定义为在 $\mathfrak{p}$ 终止的素理想链 $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_r = \mathfrak{p}$ 的长度的上确界，记作 height $\mathfrak{p}$. 由 (3.13)，height $\mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{p}}$. 因此，由 (11.11) 得：

系理 11.12. 在 Noether 环中，每个素理想有有限高度，因此，Noether 环中的素理想集合满足降链条件. ■

注记. 考虑以 $\mathfrak{p}$ 开始的素理想链，我们可以类似地定义 $\mathfrak{p}$ 的**深度**，记作 depth $\mathfrak{p}$，显然 depth $\mathfrak{p} = \dim A/\mathfrak{p}$. 但即使在 Noether 环中，一个素理想的深度也可以是无限的(除非是局部环). 见习题 4.

命题 11.13. 令 A 是维数为 d 的 Noether 局部环. 那么在 A 中存在一个由 d 个元素 $x_1, \cdots, x_d$ 生成的 $\mathfrak{m}$-准素理想，因此 $\dim A \geqslant \delta(A)$.

证明. 归纳地构造 $x_1, \cdots, x_d$，使得对每个 i，包含 $(x_1, \cdots, x_i)$ 的每个素理想的高度 $\geqslant i$. 假设 $i>0$，$x_1, \cdots, x_{i-1}$ 已经构成. 令 $\mathfrak{p}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ 是 $(x_1, \cdots, x_{i-1})$ 的高度恰为 $i-1$ 的极小素理想(如果有的话). 由于 $i-1<d=\dim A=$ height $\mathfrak{m}$，我们有 $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{p}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$，因此由 (1.11) $\mathfrak{m} \underset{+}{\subset} \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$ *). 选取 $x_i \in \mathfrak{m}$，$x_i \notin \bigcup \mathfrak{p}_j$，令 $\mathfrak{q}$ 是包含 $(x_1, \cdots, x_i)$ 的任何素理想，那么 $\mathfrak{q}$ 包有 $(x_1, \cdots, x_{i-1})$ 的某个极小素理想 $\mathfrak{p}$. 如果对某个 j，$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_j$，我们有 $x_i \in \mathfrak{q}$，$x_i \notin \mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$，于是 height $\mathfrak{q} \geqslant i$；如果 $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$，那么 height $\mathfrak{p} \geqslant i$，因此 height $\mathfrak{q} \geqslant i$. 于是包含 $(x_1, \cdots, x_i)$ 的每个素理想的高度 $\geqslant i$.

考虑 $(x_1, \cdots, x_d)$. 如果 $\mathfrak{p}$ 是这个理想的一个素理想，$\mathfrak{p}$ 的高度 $\geqslant d$，因此 $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$ (因为 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m} \Longrightarrow$ height $\mathfrak{p} <$ height $\mathfrak{m} = d$).

*) 原书误为 $\mathfrak{m} \neq \bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{p}_j$.——译者注

于是理想 $(x_1,\cdots,x_d)$ 是 m–准素的. ■

定理 11.14. *(维数定理). 对于任何 Noether 局部环 A,下面的三个整数是相等的:*

i) 在 A 中的素理想链的极大长度;

ii) 特征多项式 $\chi_m(n)=l(A/m^n)$ 的次数;

iii) A 的 m–准素理想的生成元的最小个数.

证明. (11.7), (11.10), (11.13). ■

例. 令 A 是多项式环 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 在极大理想 $m=(x_1,\cdots,x_n)$ 处的局部化. 那么 $G_m(A)$ 是 n 个未定元的多项式环, 它的 Poincaré 级数是 $(1-t)^{-n}$. 因此使用 (11.14) 中的 i) 和 ii) 的等价性,我们推出 $\dim A$*) $=n$.

系理 11.15. $\dim A\leqslant\dim_k(m/m^2)$.

证明. 如果 $x_i\in m\ (1\leqslant i\leqslant s)$, 使得它们在 m/m^2 中的象组成这个向量空间的基,那么由(2.8), x_i 生成 m;因此由(11.13), $\dim_k(m/m^2)=s\geqslant\dim A$. ■

系理 11.16. 令 A 是 Noether 环, $x_1,\cdots,x_r\in A$. 那么属于 $(x_1,\cdots,x_r)$ 的每个极小理想 p 的高度 $\leqslant r$.

证明. 在 A_p 中, 理想 $(x_1,\cdots,x_r)$ 变成 p^e–准素的, 因此 $r\geqslant\dim A_p=\text{height }p$. ■

系理 11.17. (Krull 主理想定理). 令 A 是 Noether 环, x 是 A 的一个元素,它不是零因子也不是可逆元. 那么 (x) 的每个极小素理想的高度都等于 1.

证明. 由(11.16), $\text{height }p\leqslant 1$. 如果 $\text{height }p=0$, 那么 p 是属于 0 的素理想,由(4.7), p 的每个元素是零因子, 但是 $x\in p$. 得到矛盾. ■

系理 11.18. 令 A 是 Noether 局部环, x 是 m 的元素且不是零因子. 那么 $\dim A/(x)=\dim A-1$.

证明 令 $d=\dim A/(x)$. 由 (11.9) 和 (11.14), 我们有

---

*) 在原书中,这里是 $\dim A_m=n$.——译者注

$d \leqslant \dim A - 1$. 另一方面,令 x_i $(1 \leqslant i \leqslant d)$ 是 $\mathfrak{m}$ 的元素,它们在 $A/(x)$ 中的象生成一个 $\mathfrak{m}/(x)$-准素理想. 那么在 A 中的理想 $(x, x_1, \cdots, x_d)$ 是 $\mathfrak{m}$-准素的,因此 $d + 1 \geqslant \dim A$. ■

系理 11.19. 令 $\hat{A}$ 是 A 的 $\mathfrak{m}$-adic 完备化. 那么 $\dim A = \dim \hat{A}$.

证明. 由 (10.15), $A/\mathfrak{m}^n \cong \hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}^n$, 因此 $\chi_{\mathfrak{m}}(n) = \chi_{\hat{\mathfrak{m}}^n}(n)$.
■

如果 $x_1, \cdots, x_d$ 生成一个 $\mathfrak{m}$-准素理想, 且 $d = \dim A$, 我们就把 $x_1, \cdots, x_d$ 叫作一个**参数系**. 下面的命题叙述了它们的一个无关性质.

命题 11.20. 令 $x_1, \cdots, x_d$ 是 A 的一个参数系, $\mathfrak{q} = (x_1, \cdots, x_d)$ 是由它们所生成的 $\mathfrak{m}$-准素理想. 令 $f(t_1, \cdots, t_d)$ 是系数在 A 中的 s 次的齐次多项式,且假设

$$f(x_1, \cdots, x_d) \in \mathfrak{q}^{s+1}.$$

那么 f 的所有系数都位于 $\mathfrak{m}$ 中.

证明. 考虑分次环同态.

$$\alpha: (A/\mathfrak{q})[t_1, \cdots, t_d] \to G_{\mathfrak{q}}(A),$$

它由 $t_i \to \bar{x}_i$ 给出,这里 t_i 是未定元, $\bar{x}_i$ 是 $x_i \bmod \mathfrak{q}^2$*). 由关于 f 的假设推出 $\bar{f}(t_1, \cdots, t_d)$ ($f \bmod \mathfrak{q}$ 的约简)是在 α 的核中. 若可能有 f 的某个系数是可逆元, 那么 $\bar{f}$ 不是零因子(参看第一章习题 3). 我们有

$$\begin{aligned} d(G_{\mathfrak{q}}(A)) &\leqslant d((A/\mathfrak{q})[t_1, \cdots, t_d]/(\bar{f})) & &\text{因为 } \bar{f} \in \operatorname{Ker}(\alpha) \\ &= d((A/\mathfrak{q})[t_1, \cdots, t_d]) - 1 & &\text{由(11.3)} \\ &= d - 1 & &\text{由 (11.3) 下面的例.} \end{aligned}$$

但是,由主要定理 (11.14), $d(G_{\mathfrak{q}}(A)) = d$. 这样得出矛盾. ■

如果 A 包有一个域 k, 它可以同构地映到同余类域 $A/\mathfrak{m}$ 之上,那么这个命题采取一种简单的形式:

系理 11.21. 如果 $k \subset A$ 是一个域,它同构地映到 $A/\mathfrak{m}$ 之

---

*) 这里原书中是 $x_i \bmod \mathfrak{q}$.——译者注

上，又设 $x_1,\cdots,x_d$ 是一个参数系，那么 $x_1,\cdots,x_d$ 在 k 上是代数无关的.

证明. 设 $f(x_1,\cdots,x_d)=0$，这里 f 是系数在 k 中的一个多项式. 如果 $f\neq 0$，我们可以写 $f=f_s+$ 高次项，其中 f_s 是 s 次齐次多项式且 $f_s\neq 0$. 对 f_s 应用 (11.20)，我们推出 f_s 的所有系数都在 $\mathfrak{m}$ 中. 由于 f_s 的系数都在 k 中，得到 $f_s=0$，矛盾. 因此 $x_1,\cdots,x_d$ 在 k 上是代数无关的. ■

正 则 局 部 环

在代数几何中，**奇异**点和**非奇异**点 (见习题 1) 之间存在着重要的区别. 非奇异点的局部环具有叫作**正则**局部环的推广 (对非几何情况)，它们是满足下面定理的(等价)条件 i)—iii) 之中的任何一个条件的环.

定理 11.22. 令 A 是 d 维的 Noether 局部环，$\mathfrak{m}$ 是它的极大理想，$k=A/\mathfrak{m}$. 那么下面的断言是等价的:

i) $G_{\mathfrak{m}}(A)\cong k[t_1,\cdots,t_d]$. 其中 t_i 是无关未定元;

ii) $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)=d$;

iii) $\mathfrak{m}$ 可由 d 个元素生成.

证明. i) $\Longrightarrow$ ii) 显然. ii) $\Longrightarrow$ iii) 根据 (2.8): 见 (11.15) 的证明. iii) $\Longrightarrow$ i): 令 $\mathfrak{m}=(x_1,\cdots,x_d)$，那么由 (11.20)，映射 α: $k[x_1,\cdots,x_d]\to G_{\mathfrak{m}}(A)$ 是一个分次环同构. ■

正则局部环一定是**整环**: 这是下面较一般的结果的推论.

引理 11.23. 令 A 是一个环，$\mathfrak{a}$ 是 A 的一个理想，而且 $\bigcap_n \mathfrak{a}^n=0$. 假设 $G_{\mathfrak{a}}(A)$ 是整环. 那么 A 是整环.

证明. 令 x,y 是 A 的非零元素. 那么由于 $\bigcap\mathfrak{a}^n=0$，存在整数 $r,s\geq 0$ 使得 $x\in\mathfrak{a}^r$，$x\notin\mathfrak{a}^{r+1}$，$y\in\mathfrak{a}^s$，$y\notin\mathfrak{a}^{s+1}$. 令 $\bar{x},\bar{y}$ 表示 x,y 分别在 $G_r(A)$，$G_s(A)$ 中的象，那么 $\bar{x}\neq 0$，$\bar{y}\neq 0$，因此 $\overline{xy}=\bar{x}\cdot\bar{y}\neq 0$，于是 $xy\neq 0$. ■

因此，由(9.2)，维数是 1 的正则局部环就是离散赋值环.

也可以证明，如果 A 是局部环，$G_{\mathfrak{m}}(A)$ 是整闭的整环，那么 A 是整闭的. 由此可推出，正则局部环是整闭的；但是存在不是正则的维数 >1 的整闭局部整环.

命题 11.24. 令 A 是 Noether 局部环，那么 A 是正则的当且仅当 $\hat{A}$ 是正则的.

证明. 根据 (10.16)，(10.26) 和 (11.19)，我们知道 $\hat{A}$ 是 Noether 局部环，和 A 有相同的维数而 $\hat{\mathfrak{m}}$ 是它的极大理想. 现在运用 (10.22)，得到 $G_{\mathfrak{m}}(A)\cong G_{\hat{\mathfrak{m}}}(\hat{A})$，命题成立. ∎

注记. 1) 由上边我们所说的可以得到 $\hat{A}$ 也是整环. 几何上的说法，这意味着(局部地)

$$\text{非奇异性} \Longrightarrow \text{解析不可约性},$$

或者，在非奇异点只存在一个解析"支".

2) 如果 A 包有一个同构于 $A/\mathfrak{m}$ 的域 k (几何情况)，那么 (11.22) 推出 $\hat{A}$ 是域 k 上 d 个未定元的形式幂级数环. 因此域 k 上的 d 维簇上的非奇异点的局部环的完备化都是同构的.

例. 令 $A=k[x_1,\cdots,x_n]$ (k 是任何域，x_i 是无关未定元)；再令 $\mathfrak{m}=(x_1,\cdots,x_n)$. 那么 $A_{\mathfrak{m}}$ (仿射空间 k^n 在原点的局部环)是正则局部环：因为 $G_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}})$[*)] 是 n 个变元的多项式环.

超 越 维 数

我们通过指出局部环的维数怎样与经典地由函数域定义的簇的维数相联系来结束维数理论的这个简略论述.

为简单起见，假设 k 是代数闭域，V 是 k 上的不可约仿射簇. 因此坐标环 $A(V)$ 具有形式

$$A(V)=k[x_1,\cdots,x_n]/\mathfrak{p},$$

这里 $\mathfrak{p}$ 是一个素理想. 整环 $A(V)$ 的分式域叫作 V 上的有理函

[*)] 原文是 $G_{\mathfrak{m}}(A)$.——译者注

数域，用 $k(V)$ 表示. 它是 k 的有限生成扩张，所以它在 k 上有有限超越次数——k 上的代数无关元的最大数. 这个数定义为 V 的**维数**. 现在回忆一下，根据零点定理，V 的点与 $A(V)$ 的极大理想一一对应. 如果 P 是与极大理想 $\mathfrak{m}$ 相应的点，我们把 $\dim A(V)_{\mathfrak{m}}$ 叫作 V 在 P 的**局部维数**. 我们打算证明

定理 11.25. 对于 k 上的任何不可约簇 V 来说，V 在任何一点的局部维数都等于 $\dim V$.

注记. 由 (11.21) 我们已经知道 $\dim V \geqslant \dim A_{\mathfrak{m}}$ 对于所有的 $\mathfrak{m}$. 问题是要证明反向的不等式. 为此目的，主要的引理是:

引理 11.26. 令 $B \subseteq A$ 是整环，B 是整闭的，A 在 B 上整，再令 $\mathfrak{m}$ 是 A 的极大理想，$\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap B$. 那么 $\mathfrak{n}$ 是极大的且 $\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim B_{\mathfrak{n}}$.

证明. 这是第五章结果的一个容易的推论. 首先由 (5.8) $\mathfrak{n}$ 是极大的. 其次，如果

$$\mathfrak{m} \supset \mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2 \cdots \supset \mathfrak{q}_d \tag{1}$$

是 A 中的严格素理想链，由 (5.9) 它与 B 的交是严格素理想链

$$\mathfrak{n} \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_d. \tag{2}$$

这证明了 $\dim B_{\mathfrak{n}} \geqslant \dim A_{\mathfrak{m}}$. 反之给了严格链 (2)，由 (5.16) 我们能够把它提升为链 (1)（一定严格），因此 $\dim A_{\mathfrak{m}} \geqslant \dim B_{\mathfrak{n}}$. ■

现在我们可以继续:

(11.25) 的证明. 根据正规化引理（第五章，习题 16），我们能够找到包含在 $A(V)$ 中的多项式环 $B = k[x_1, \cdots, x_d]$ 使得 $d = \dim V$ 和 $A(V)$ 在 B 上整. 由于 B 是整闭的（根据 (5.12) 后面的注记），我们可以应用 (11.26)，于是就把我们的工作归结到对于环 B，即对于仿射空间，去证明 (11.25). 由于仿射空间的任何一点都可取作坐标原点而我们已经看到，$k[x_1, \cdots, x_d]$ 在极大理想 $(x_1, \cdots, x_d)$ 的局部化是 d 维局部环，命题得证. ■

系理 11.27. 对于 $A(V)$ 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$，我们有

$$\dim A(V) = \dim A(V)_{\mathfrak{m}}.$$

证明. 根据定义，我们有 $\dim A(V) = \sup_{\mathfrak{m}} \dim A(V)_{\mathfrak{m}}$. 但是

由(11.25)，所有 $A(V)_{\mathfrak{m}}$ 都有相同的维数. ■

习　题

1. 令 $f\in k[x_1,\cdots,x_n]$ 是代数的闭域 k 上的一个不可约多项式. 在簇 $f(x)=0$ 上的一点 P 是非奇异的 $\Leftrightarrow$ 不是所有偏微商 $\partial f/\partial x_i$ 在 P 点全为零. 令 $A=k[x_1,\cdots,x_n]/(f)$，令 $\mathfrak{m}$ 是 A 中与点 P 对应的极大理想. 证明 P 是非奇异的 $\Leftrightarrow A_{\mathfrak{m}}$ 是正则局部环.

　　[由(11.18)我们有 $\dim A_{\mathfrak{m}}=n-1$. 现在

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\cong(x_1,\cdots,x_n)/(x_1,\cdots,x_n)^2+(f),$$

它有维数 $n-1$ 当且仅当 $f\notin(x_1,\cdots,x_n)^2$.]

2. 在(11.21)中设 A 是完备的. 证明由 $t_i\mapsto x_i$ $(1\leqslant i\leqslant d)$ 给的同态 $k[[t_1,\cdots,t_d]]\to A$ 是单的，且 A 是 $k[[t_1,\cdots,t_n]]$ 上的有限生成模. [利用(10.24).]

3. 把(11.25)推广到非代数闭域上. [如果 $\bar{k}$ 是 k 的代数闭包，那么 $\bar{k}[x_1,\cdots,x_n]$ 在 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 上整.]

4. 无限维 Noether 整环的一个例子 (Nagata). 设 k 是域，设 $A=k[x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots]$ 是 k 上可数无穷多个未定元的多项式环. 设 $m_1,m_2,\cdots$ 是正整数的递增序列，使得 $m_{i+1}-m_i>m_i-m_{i-1}$ 对一切 $i>1$. 设 $\mathfrak{p}_i=(x_{m_i+1},\cdots x_{m_{i+1}})$，又设 S 是理想 $\mathfrak{p}_i$ 的并在 A 中的补集.

　　每个 $\mathfrak{p}_i$ 是素理想，因此集合 S 是乘法封闭集. 由第七章，习题9，环 $S^{-1}A$ 是 Noether 环. 每个 $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ 的高度等于 $m_{i+1}-m_i$，因此 $\dim S^{-1}A=\infty$.

5. 用 Grothendieck 群 $K(A_0)$ 的语言重新叙述(11.1)(第七章，习题25).

6. 设 A 是环(不一定是 Noether 环). 证明

$$1+\dim A\leqslant\dim A[x]\leqslant 1+2\dim A.$$

　　[令 $f: A\to A[x]$ 是嵌入映射，考虑 f^*: Spec$(A[x])\to$

Spec (A) 在 A 的素理想 $\mathfrak{p}$ 之上的纤维. 这个纤维可以与 $k \otimes_A A[x] \cong A[x]$ 的谱等同，这里 k 是在 $\mathfrak{p}$ 上的同余类域（第三章，习题 21)，且 $\dim k[x] = 1$. 再利用第四章，习题 7 (ii).]

7. 设 A 是 Noether 环. 那么

$$\dim A[x] = 1 + \dim A.$$

因此，对 n 作归纳，有

$$\dim A[x_1, \cdots, x_n] = n + \dim A.$$

[令 $\mathfrak{p}$ 是 A 中高度为 m 的一个素理想，那么存在 $a_1, \cdots, a_m \in \mathfrak{p}$，使 $\mathfrak{p}$ 是属于理想 $\mathfrak{a} = (a_1, \cdots, a_m)$ 的极小素理想. 由第四章，习题 7，$\mathfrak{p}[x]$ 是 $\mathfrak{a}[x]$ 的极小素理想，因此 height $\mathfrak{p}[x] \leqslant m$. 另一方面，一个素理想链 $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m = \mathfrak{p}$ 产生一个链 $\mathfrak{p}_0[x] \subset \mathfrak{p}_1[x] \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_m[x]$，因此 height $\mathfrak{p}[x] \geqslant m$. 因此 height $\mathfrak{p}[x] =$ height $\mathfrak{p}$. 再利用习题 6 的论据.]

汉英名词索引

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

其 他

英汉名词索引*)

*) 本索引由原书索引翻译，但删除了个别重复的名词。——译者